

MPRA

Munich Personal RePEc Archive

Testing the neoclassical production function

Quaas, Georg

25 April 2018

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/86368/>
MPRA Paper No. 86368, posted 26 Apr 2018 01:07 UTC

Test der neoklassischen Produktionsfunktion

Georg Quaas

Vorbemerkung

Unter einem „Test“ wird hier die Konfrontation einer Theorie mit der Empirie verstanden. Ein Theorietest beschränkt sich nicht auf die ökonometrische Schätzung einer theoretisch begründeten Gleichung mit anschließender Auswertung der Resultate, sondern erfordert eine umfassende Einordnung in den theoretischen und empirischen Kontext. In dieser Studie wird der inhaltliche Fokus auf die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion gelegt, sowohl in ihrer ursprünglichen Fassung als auch in ihrer von Solow präzisierten Version. Die übergreifende Fragestellung besteht darin, in welcher Weise die damit verbundenen Theorien die langfristige Entwicklung einer Volkswirtschaft (wie die der Bundesrepublik Deutschland) zur Darstellung bringt. In den ersten Abschnitten werden die theoretischen Grundlagen rekapituliert, um empirisch nachweisbare Konsequenzen herauszuarbeiten. In den folgenden Abschnitten erfolgt dann eine Konfrontation mit den bundesdeutschen Daten, wobei zunächst ein visueller Vergleich der Kurvenformen vorgenommen wird. Daran anschließend werden ökonometrische Schätzungen herangezogen, um sowohl die hohe prognostische Leistungsfähigkeit als auch die Grenzen der neoklassischen Produktionstheorie aufzuzeigen. Schließlich wird die Frage nach dem evolutionären Aspekt dieser Theorie mit zwei alternativen Interpretationen beantwortet und versucht, daraus einen Hinweis für die Diskussion wirtschaftspolitischer Aspekte der Investitionstätigkeit abzuleiten.

1. Die Clark-Ramsey-Parabel / Cobb-Douglas Funktion¹

Die gesamtwirtschaftliche Produktionsfunktion sei durch $Y = Y(L, K)$ gegeben. Vorausgesetzt wird, dass die Produktionsfunktion skaleninvariant ist, das heißt, $Y(\alpha L, \alpha K) = \alpha Y(L, K)$. Die ökonomische Bedeutung der Skaleninvarianz besteht darin, dass der Output eine lineare Funktion vom **gesamten** Input ist. Wenn also die eingesetzten Faktoren proportional zueinander zu- oder abnehmen, nimmt der Output im gleichen Maße zu oder ab.

Aus der Skaleninvarianz folgt für $\alpha = 1/L$, dass $\frac{Y}{L} = Y(1, K/L)$ gilt. Mit den Definitionen für die Produktivität (Output pro Kopf) $y = Y/L$ und für die Kapitalintensität (Kapitaleinsatz pro Kopf) $k = K/L$ ergibt sich aus Y die Produktionsfunktion $y = y(k)$, die die Produktivität in Abhängigkeit vom Kapitaleinsatz darstellt. Es werden abnehmende Grenzerträge angenommen, also $\frac{dy}{dk} = y' = r > 0$ und $y'' < 0$. Graphisch hat die Funktion folgende Form:

¹ Vgl. die Darstellungen der Neoklassik bei Alfred E. Ott / Harald Winkel: Geschichte der theoretischen Volkswirtschaftslehre. Göttingen 1985. Sowie Fritz Helmedag: Warenproduktion mittels Arbeit. Marburg 1992.

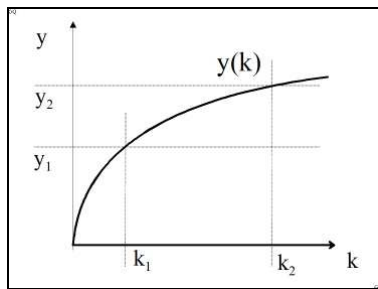


BILD 1: Output und Kapital je Beschäftigteinheit

Für die Tangente an einen beliebigen Punkt k und y der Kurve gilt die Gleichung $y = w + rk$, wobei w als Lohn, rk als Profit je Arbeitnehmer und r als Profitrate interpretiert werden.² BILD 2 verdeutlicht das:

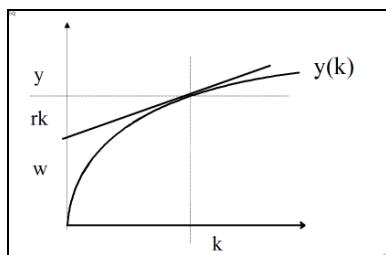


BILD 2: Tangente an $y(k)$

Es gilt:

$$r = \frac{y - w}{k}$$

Eine mögliche Interpretation des ökonomischen Mechanismus', der dem BILD 2 zugrunde liegt, besteht darin, die (allgemeine) Profitrate zunächst als gegeben zu betrachten; sie entspricht dem Anstieg der Tangente am Punkt k , wobei k der Kapitaleinsatz in der betrachteten Branche ist. Der Anstieg der Tangente links von k ist größer als die allgemeine Profitrate, die Lohnsätze sind dem entsprechend geringer. Es wird folglich weiteres Kapital in die profitablere Branche fließen, das sich angesichts knapper Arbeitskräfte (geringes Arbeitsangebot bei geringen Löhnen) vor allem in einer höheren Kapitalintensität niederschlagen wird. Der Kapitaleinsatz und damit die Produktivität werden so lange erhöht, bis die Profitrate der Branche auf die allgemein übliche Profitrate gefallen ist.

Bei dieser Interpretation wird der Lohn als variabel betrachtet. Bei fallender Profitrate steigt der Lohnsatz, und zwar so lange, bis die – bei vorgegebener Profitrate – maximale Produktivität erreicht ist.

Der Zusammenhang zwischen y und Y liefert ebenfalls interessante analytische Einsichten:

Wegen des definitorischen Zusammenhanges $Y = Ly$ folgt:

² Das folgt teils aus der Homogenität der Produktionsfunktion, teils aus der Theorie der Firma, insbesondere aus der Maximierung des Profits mit Hilfe der Ableitungen nach L und K : $\Pi = Y - wL - rK$. Piketty (2014: 79, Fn. 2) legt gute Gründe dar, anstelle des Ausdrucks „Profitrate“ den der „Kapitalrednrite“ zu verwenden. Mit Blick auf die Dogmengeschichte wird hier anders verfahren.

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = Ly' = Lr \text{ und}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = y + L \frac{\partial y}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial L} = y + Ly' \left(-\frac{K}{L^2} \right) = y - rk$$

Damit ist das totale Differential:

$$dY = L \cdot r \cdot dK + (y - rk) dL$$

Die Eigenschaften der Produktionsfunktion y :

- (1) Der Output (das Sozialprodukt pro Kopf) wächst mit dem Kapitaleinsatz, aber die Ertragszuwächse werden kleiner.
- (2) Im Gleichgewicht der vollständigen Konkurrenz stimmen die partiellen Grenzproduktivitäten mit dem Lohnsatz und der Profitrate überein. Es gilt: $Y = wL + rK$.
- (3) Dimensionsprüfung zeigt, dass das Kapitalgut auch als Konsumgut verwendet wird. (Helmedag meint, dass die Preise dann an sich überflüssig sind. Wichtiger ist die Bemerkung, dass alle hier auftretenden Größen Realgrößen sind.)
- (4) Aus den Axiomen über die erste und die zweite Ableitung der Produktionsfunktion folgt:

$$\frac{dr}{dk} = y' < 0$$

Profitrate und Kapitalintensität verhalten sich invers zueinander (siehe BILD 3).

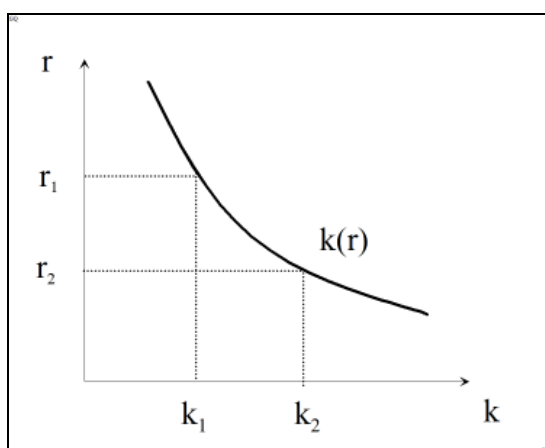


BILD 3: Die inverse Beziehung zwischen Kapitalintensität und Profitrate

Unterstellt man eine mit der Zeit zunehmende Kapitalintensität – was bei neutralem technischen Fortschritt der Fall ist (siehe Abschnitt 4) –, so kann diese Beziehung als das Analogon zu Marx' These vom tendenziellen Fall der Profitrate betrachtet werden.

(5) Outputentwicklung (Output je Arbeitseinheit!) und Profitratenentwicklung verhalten sich ebenfalls invers zueinander:

$$\frac{dy}{dr} = \frac{dy}{dk} \frac{dk}{dr} = \frac{y'}{y''} < 0 .$$

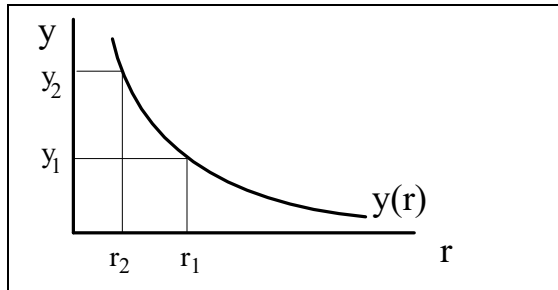


BILD 4: Die inverse Beziehung zwischen Output und Profitrate

(6) Aus $w = y - y'k$ folgt die Ableitung des Lohnes nach der Kapitalintensität:

$$\frac{dw}{dk} = y' - y''k - y' = -y''k > 0 ,$$

Die Änderung des Lohnsatzes ist der Kapitalintensität gleichgerichtet (zur Erinnerung: die zweite Ableitung von y ist negativ). Der Kurvenverlauf ist dem der Produktionsfunktion ähnlich.

Aus diesem harmlos klingenden Satz wird oftmals eine kausale Interpretation abgeleitet, die eine gravierende Bedeutung für die Beschäftigungspolitik hat: Auf Erhöhungen des Reallohnes reagieren die Unternehmer mit kapitalintensiver Technik, d.h., lebendige Arbeit wird durch Maschinen ersetzt.

Diese Konsequenz ist aus zwei Gründen kurzschlüssig:

(i) Die Wirkungsrichtung ist durch einen funktional-deterministischen Zusammenhang nicht eindeutig festgelegt.

(ii) Dass die Erhöhung der Kapitalintensität mit einer Verringerung des Arbeitseinsatzes verbunden ist, geht aus der obigen Beziehung gar nicht hervor, da das Differential dL nicht auftritt.

(7) Für die Beziehung zwischen Lohnsatz und Profitrate erhält man:

$$\frac{dw}{dr} = \frac{dw}{dk} \frac{dk}{dr} = \frac{-y''k}{y''} = -k < 0 :$$

Eine Erhöhung des Lohnsatzes führt zu einem Rückgang der Profitrate und umgekehrt: der „Kuchen“ kann nur einmal geteilt werden.

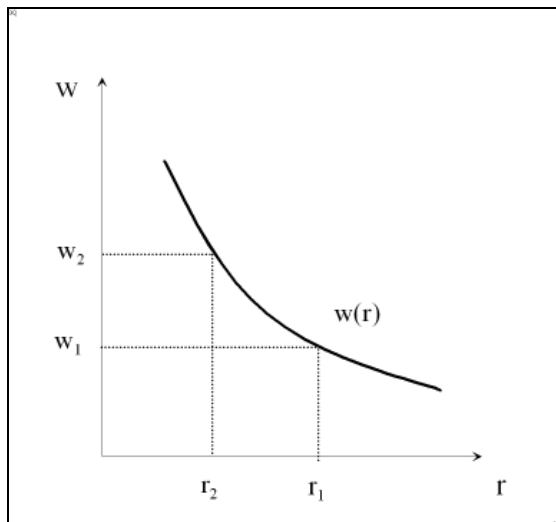


BILD 5: Die Lohnsatz-Profitratenbeziehung

Lohnbezieher stehen demnach funktional und mit Blick auf ihr Einkommen in einem antagonistischen Zusammenhang zu den Empfängern von Kapitaleinkommen.

(8) Schließlich ergibt sich für den Zusammenhang zwischen Output (pro Kopf) und Lohnsatz der positive Zusammenhang

$$\frac{dy}{dw} = \frac{dy}{dk} \frac{dk}{dw} = \frac{r}{-y''k} > 0.$$

Die Löhne steigen mit der Produktivität, und zwar umso stärker, je höher die Proftrate und je geringer der Kapitaleinsatz sind.

2. Der analytische Ansatz³

Die Cobb-Douglas Produktionsfunktion wird durch die Gleichung

$$Y = K^a L^{1-a} \text{ mit } 0 < a < 1 \quad (1)$$

dargestellt. Für den Output per capita gilt also:

$$y = \frac{K^a}{L^a} = k^a. \quad (2)$$

Für die erste Ableitung nach k erhält man:

$$y' = ak^{a-1} = r \text{ oder } k = \left(\frac{a}{r}\right)^{1/(1-a)}, \quad (3)$$

³ Die folgenden Ausführungen orientieren sich an Robert M. Solow: A Contribution to the Theory of Economic Growth. In: The Quarterly Journal of Economics, Vol. 70, No. 1 (Feb., 1956), pp. 65-94. Anstelle des dort für die „ratio of capital to labour“ verwendeten r wird hier k benutzt, da das Symbol r schon für die Proftrate vergeben ist.

woraus sich die Form der Kurve in BILD 3 ergibt. Die zweite Ableitung von y nach k , d.h.

$$y'' = a(a-1)k^{a-2} = \frac{dr}{dk} < 0, \quad (4)$$

erfüllt die eingangs geforderte Bedingung aufgrund der Konditionierung von a . Mit Hilfe der explizit gegebenen Produktionsfunktion lässt sich auch die zweite Ableitung von r nach k bilden:

$$\frac{d^2r}{dk^2} = a(a-1)(a-2)k^{a-3} \quad (5)$$

Während die erste Ableitung von r nach k negativ ist, wird die zweite wieder positiv. Daraus ergibt sich der inverse, asymptotische Kurvenverlauf in BILD 3.

Die zu BILD 4 gehörige Kurve entspricht der Funktion

$$y = \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{a}{1-a}}, \quad (6)$$

die man erhält, wenn man in die (pro Kopf-) Produktionsfunktion (2) die oben aus der ersten Ableitung gewonnene Formel für k (siehe 3!) einsetzt. Die erste Ableitung von y nach r ist negativ,

$$\frac{dy}{dr} = \frac{dy}{dk} \frac{dk}{dr} = r \frac{dk}{dr} = r \frac{1}{1-a} \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{1-a}-1} \frac{(-a)}{r^2} = \frac{a}{(a-1)r} k \frac{r}{a} = \frac{k}{a-1},^4 \quad (7)$$

während die zweite Ableitung positiv ist:

$$\frac{d^2y}{dr^2} = \frac{1}{a-1} \frac{dk}{dr} = \frac{1}{a-1} \frac{1}{\frac{dr}{dk}} = \frac{1}{a(a-1)^2 k^{a-2}} = \frac{k^{2-a}}{a(a-1)^2}. \quad (8)$$

Hierbei ist (4) verwendet worden. Negative erste Ableitung und positive zweite Ableitung determinieren die Form der Kurve in BILD 4.

Die Lohnfunktion (Reallohnsatz) erhält man nach Einsetzen von y aus (2) und y' aus (3) in die obige Gleichung $w = y - y'k$:

$$w = (1-a)k^a = (1-a)y. \quad (9)$$

Gleichung (9) kann übrigens von beiden Seiten gelesen werden: y ist eine lineare Funktion des Lohnsatzes und umgekehrt.

⁴ Hierbei ist $\frac{dy}{dk} = r$, der Rest ergibt sich aus der Ableitung der Funktion (3) nach k .

Die erste Ableitung der Lohnfunktion nach k ist

$$\frac{dw}{dk} = a(1-a)k^{a-1} = \frac{a(1-a)}{k^{1-a}}, \quad (10)$$

also positiv. Die zweite Ableitung ist

$$\frac{d^2w}{dk^2} = a(1-a)(a-1)k^{a-2} = \frac{-a(1-a)^2}{k^{2-a}} < 0, \quad (11)$$

die Lohnfunktion verläuft folglich ähnlich wie die Produktionsfunktion.

Die Ableitung der Lohnfunktion nach der Profitrate ist oben bereits berechnet worden, kann hier aber mit Hilfe von (10) und (4) wie folgt verifiziert werden:

$$\frac{dw}{dr} = \frac{dw}{dk} \frac{dk}{dr} = \frac{a(1-a)k^{a-1}}{a(a-1)k^{a-2}} = -k. \quad (12)$$

Mit Hilfe des analytischen Ansatzes der Produktionsfunktion lassen sich mit (9) und (3) auch die Gleichungen für den Lohnsatz und die Profitrate ableiten:

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = (1-a)K^a L^{-a} = (1-a)k^a = w \quad (13)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = a \frac{K^{a-1}}{L^{a-1}} = ak^{a-1} = r \quad (14)$$

Eine allgemeine Eigenschaft der Cobb-Douglas-Funktion besteht darin, dass die Lohn- und Profitanteile am Sozialprodukt y bei gegebenem Kapitaleinsatz k konstant sind. Um das zu sehen, setze man die oben abgeleiteten Gleichungen für w und r ein:

$$\frac{w}{r} = \frac{(1-a)k^a}{a k^{a-1}} = \frac{(1-a)}{a} k \quad (15)$$

3. Wachstums-/Gleichgewichtstheorie

Betrachtet wird eine geschlossene Volkswirtschaft, bei der bekanntlich Sparen = Investition gilt. Es sei s die (konstante) Sparquote. Dann ist

$$\dot{K} = I = sY. \quad (1)$$

Andererseits erhält man aufgrund der Definition von k als Kapitalintensität für die erste Ableitung von K nach der Zeit t :

$$\dot{K} = \dot{k}L + k\dot{L}. \quad (2)$$

In der Theorie wird angenommen, dass sich das Arbeitsvolumen L exponentiell mit der Rate n entwickelt – der Wachstumsrate der Bevölkerung:

$$L = L_0 e^{nt}, \quad (3)$$

so dass die erste Ableitung von L nach der Zeit t in Gleichung (2) spezifiziert werden kann:

$$\dot{K} = \dot{k}L_0 e^{nt} + nkL_0 e^{nt} \quad (4)$$

Damit folgt aus der Formel (1) bei Beachtung der Skaleninvarianz von Y :

$$\dot{k}L_0 e^{nt} + nkL_0 e^{nt} = sL_0 e^{nt} y(k), \quad (5)$$

woraus sich die folgende Differentialgleichung ergibt:

$$\dot{k} = sy(k) - nk. \quad (6)$$

Ein Gleichgewicht liegt vor, wenn $\dot{k} = 0$ ist. Der Nachweis, dass sich die betrachtete Volkswirtschaft auf das Gleichgewicht zu bewegt, kann geometrisch geführt werden. Dazu wird die Gerade nk in das Bild der Clark-Ramsey-Parabel (letztere multipliziert mit der Sparquote s) eingetragen:

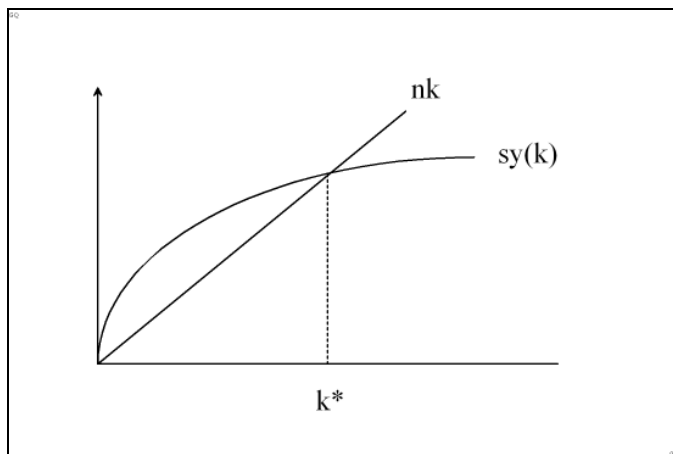


BILD 6: Nachweis der Existenz eines Gleichgewichts

(i) Die erste Ableitung der Parabel y strebt für $k \rightarrow +0$ gegen $+\infty$, so dass in einer hinreichend kleinen Umgebung von Null die Kurve stets über der Geraden liegt. Mit zunehmenden k nimmt auch y' ab und nähert sich asymptotisch der Null, so dass y an irgendeinem Punkt k^* die Gerade nk schneiden muss. Die Darstellung ist allgemeingültig unter den gegebenen Voraussetzungen.

(ii) Links neben k^* ist $\dot{k} = sy(k) - nk > 0$, also wächst k . Rechts von k^* ist $\dot{k} = sy(k) - nk < 0$, also fällt k . An der Stelle k^* ist $\dot{k} = sy(k) - nk = 0$, hier ist also k stationär. Insgesamt bedeutet das, dass aus theoretischer Sicht am Punkt k^* ein stabiles Gleichgewicht vorliegt.

Folgerung:

Wenn k (das Verhältnis von K zu L) konstant ist, hat K dieselbe Wachstumsrate wie L , also n . K wächst im Gleichgewicht mit derselben „natürlichen“ Wachstumsrate wie die Beschäftigung.

Das lässt sich auch explizit zeigen. Wir beginnen noch einmal mit der Gleichung für das Kapitalwachstum und setzen dort die Cobb-Douglas-Funktion ein:

$$\dot{K} = sK^a L_0^b e^{nbt} \quad \text{mit } b = 1 - a. \quad (7)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet (wie man durch Differenzieren leicht nachprüft, vgl. auch Christiaans 2004: 24):

$$K(t) = \left[K_0^b - \frac{s}{n} L_0^b + \frac{s}{n} L_0^b e^{nbt} \right]^{\frac{1}{b}} \quad (8)$$

Für große t gilt:

$$K(t) \approx \left(\frac{s}{n} \right)^{\frac{1}{b}} L_0 e^{nt}. \quad (9)$$

Im nach unendlich langer Zeit erreichbaren Gleichgewicht ist also

$$k^* = \left. \frac{K}{L} \right|_{t \rightarrow \infty} = \left(\frac{s}{n} \right)^{\frac{1}{b}} \quad (10)$$

Für den (realen) Output ergibt sich:

$$Y = K^a L_0^b e^{nbt} = L_0^b e^{nbt} \left[K_0^b - \frac{s}{n} L_0^b + \frac{s}{n} L_0^b e^{nbt} \right]^{\frac{a}{b}} \quad (11)$$

Für große t reduziert sich der Klammerausdruck wie oben, und für Y ergibt sich die Näherung:

$$Y \approx L_0^b e^{nbt} \left(\frac{s}{n} \right)^{\frac{a}{b}} L_0^a e^{ant} = \left(\frac{s}{n} \right)^{\frac{a}{b}} L_0 e^{nt} \quad (12)$$

Der (reale) Output wächst folglich mit der natürlichen Rate n .

Für den Output je Beschäftigteneinheit ergibt sich der Gleichgewichtswert:

$$y(k^*) = \left. \frac{Y}{L} \right|_{t \rightarrow \infty} = \left(\frac{s}{n} \right)^{\frac{a}{b}} \quad (13)$$

Der Kapitalkoeffizient im Gleichgewicht ist wegen (10) und (13):

$$\frac{K}{Y} = \frac{K}{L} \frac{L}{Y} = \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{b}} \left(\frac{s}{n}\right)^{-\frac{a}{b}} = \frac{s}{n} \quad (14)$$

Bedenkt man, dass $w = (1-a)k^a$ sowie $r = ak^{a-1}$, und setzt in diese Beziehungen den Gleichgewichtswert für k ein, so erhält man für den Reallohnsatz im Gleichgewicht:

$$w = (1-a) \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{a}{b}}, \quad (15)$$

und für die Profitrate im Gleichgewicht:

$$r = a \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{a-1}{b}} = a \frac{n}{s} \quad (16)$$

Das Verhältnis von Lohnsatz und Profitrate zueinander ist im Gleichgewicht konstant:

$$\frac{w}{r} = \frac{(1-a)}{a} \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{b}}. \quad (17)$$

Zerlegt man das Sozialprodukt pro (Arbeitnehmer-) in seine beiden Bestandteile

$$y = k^a = \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{a}{b}} = w + rk = (1-a) \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{a}{b}} + a \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{a-1}{b}} \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{b}} = (1-a) \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{a}{b}} + a \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{a}{b}} \quad (18)$$

dann sieht man noch einmal: Die Anteile von Lohn und Profit am Einkommen sind konstant – bei konstantem Kapitaleinsatz.

4. Neutraler technologischer Fortschritt

Einen einfachen Ansatz zur Berücksichtigung des technologischen Fortschrittes stellt die folgende Produktionsfunktion für das reale Sozialprodukt

$$Y = e^{gt} Y(L, K) \quad (1)$$

dar. Dabei wird vereinfachend angenommen, dass die marginalen Raten der Substitution vom technischen Fortschritt nicht beeinflusst werden (= Definition des *neutralen* technischen Fortschritts).⁵ Die oben abgeleitete Differentialgleichung für die Kapitalintensität lautet unter dieser Bedingung:

$$\dot{k} = se^{gt} y(k) - nk, \quad (2)$$

⁵ Diese und die folgende Darstellungen basieren u.a. auf R. M. Solow: Technical Change and the Aggregate Production Function. In: The Review of Economics and Statistics, Vol. 39, No. 3 (Aug., 1957), pp. 312-320.

woran man ersehen kann, dass sich der Gleichgewichtspunkt unter der Bedingung $g > 0$ im Koordinatensystem ständig nach Nordosten verschiebt: Die Kapitalintensität nimmt zu.

Die Differentialgleichung für K lautet:

$$\dot{K} = sK^a L_0^b e^{(nb+g)t} . \quad (3)$$

Wie man leicht nachprüft, ist die Lösung der Differentialgleichung gegeben durch:

$$K(t) = \left[K_0^b - \frac{bs}{nb+g} L_0^b + \frac{bs}{nb+g} L_0^b e^{(nb+g)t} \right]^{\frac{1}{b}} \quad (4)$$

Für große t gilt:

$$K(t) \approx \left(\frac{bs}{nb+g} \right)^{\frac{1}{b}} L_0 e^{\left(\frac{n+g}{b} \right) t} . \quad (5)$$

„In the long run the capital stock increases at the relative rate $n + \frac{g}{b}$ (compared with n in the case of no technological change).” (Solow 1956: 85).

Die Funktion für den realen Output wird jetzt folgendermaßen notiert:

$$Y = K^a L_0^b e^{(nb+g)t} \quad (6)$$

Bei großen t kann man die ersten beiden Terme in der Funktion für das Kapital (4) vernachlässigen, so dass (5) gilt. Einsetzen in (6) ergibt unter dieser Bedingung:

$$Y = L_0^{b+a} \left(\frac{bs}{nb+g} \right)^{\frac{a}{b}} e^{a \left(\frac{n+g}{b} \right) t} e^{(nb+g)t} = L_0 \left(\frac{bs}{nb+g} \right)^{\frac{a}{b}} e^{\left(\frac{n+ag}{b} + g \right) t} = L_0 \left(\frac{bs}{nb+g} \right)^{\frac{a}{b}} e^{\left(\frac{n+g}{b} \right) t} \quad (7)$$

Die Wachstumsrate des realen Sozialprodukts ist im Gleichgewicht dieselbe wie die des „capital stock“.

Wie verhält sich $k = \frac{K}{L}$ im Gleichgewicht (die Unabhängige der Clark-Ramsey-Parabel)?

Dazu muss der angenäherte Ausdruck (5) für das Kapital durch den Ansatz für Arbeit geteilt werden. Wie man leicht sieht ist:

$$k(t) = \frac{K(t)}{L(t)} = \left(\frac{bs}{nb+g} \right)^{\frac{1}{b}} e^{\frac{g}{b} t} . \quad (8)$$

Der Gleichgewichtspunkt im Diagramm mit der Clark-Ramsey-Parabel wandert mit der Zeit auf der Abszisse nach rechts. Für das Einkommen pro Kopf (Beschäftigtereinheit) ergibt sich aus der Formel (7) für den Gleichgewichtspunkt:

$$y(t) = \left(\frac{bs}{nb+g} \right)^{\frac{a}{b}} e^{\frac{g}{b}t} \quad (9)$$

Der Gleichgewichtspunkt wandert auf der Ordinate nach oben. Die Steigung der dabei erzeugten Geraden ist

$$\frac{y(t)}{k(t)} = m = \left(\frac{bs}{nb+g} \right)^{-1} = \frac{nb+g}{bs} \quad (10)$$

M.a.W.: *Die Gleichgewichtszustände einer Volkswirtschaft erscheinen nicht als Parabel, sondern als eine Gerade.*

5. Zeitliche Entwicklung der Lohnfunktion (ohne technischen Fortschritt)

Aus der Cobb-Douglas Produktionsfunktion ergibt sich für den realen Output ohne technischen Fortschritt:

$$Y = K^a L_0^b e^{nbt} = L_0^b e^{nbt} \left[K_0^b - \frac{S}{n} L_0^b + \frac{S}{n} L_0^b e^{nbt} \right]^{\frac{a}{b}}$$

Und damit für den Output pro Arbeitnehmer, also für die Produktivität:

$$y = K^a L_0^{-a} e^{-nat} = L_0^{-a} e^{-nat} \left[K_0^b - \frac{S}{n} L_0^b + \frac{S}{n} L_0^b e^{nbt} \right]^{\frac{a}{b}}$$

Schließlich erhalten wir für den Lohnsatz (siehe Gl. 9, Abschnitt 2):

$$w = b L_0^{-a} e^{-nat} \left[K_0^b - \frac{S}{n} L_0^b + \frac{S}{n} L_0^b e^{nbt} \right]^{\frac{a}{b}}.$$

Es sei daran erinnert, dass $b = 1 - a$ gilt.

Für große t ergibt sich:

$$b A_0^{-a} A_0^a e^{n(a-a)t} \left(\frac{S}{n} \right)^{\frac{a}{b}} = \text{const.}$$

6. Empirische Überprüfung

Statistische Überprüfungen von Theorien basieren auf der Wissenschaftstheorie des Kritischen Rationalismus. Demnach kommt es darauf an, Theorien den härtesten Tests auszusetzen. Allerdings zeigt die Forschungspraxis, dass man eine Theorie relativ leicht falsifizieren kann, indem man ihr eine unpassende oder zumindest schlecht passende Operationalisierung unterlegt. Operationalisieren heißt, den theoretischen Variablen beobachtbare Größen zuzu-

ordnen, um den Test anhand von Daten überhaupt erst möglich zu machen. Da sich ökonomische Theorien selten auf beobachtbare Größen beziehen, sind Operationalisierungen notwendig. Beispielsweise kann die Variable Y , die in der Theorie als Output („Sozialprodukt“) angesprochen wird, bei einer empirischen Analyse der Volkswirtschaft als Bruttoinlandsprodukt, Bruttonationaleinkommen, Nettoinlandsprodukt, Nettonationaleinkommen, Bruttowertschöpfung, Nettowertschöpfung oder als Volkseinkommen – letzteres ein Aggregat in der deutschen Anwendung der internationalen Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen – operationalisiert werden. Im Unterschied zum eigentlichen Theorientest muss die Operationalisierung so erfolgen, dass sie den theoretischen Annahmen möglichst nahe kommt. Die eben genannten sieben Möglichkeiten, den Output zu erfassen, müssen für bestimmte Tests der neoklassischen Produktionsfunktion pro Kopf berechnet werden, wobei es wieder mehrere Möglichkeiten gibt. Man kann die Zahl der Arbeitnehmer, der Erwerbstätigen, der Erwerbspersonen oder der Bevölkerung im Nenner verwenden, wenn man „den Output“ als eine Pro-Kopf-Größe berechnet. Im vorliegenden Fall kommt eine weitere Anforderung hinzu. Der Output per capita muss vollständig und erschöpfend in Arbeitseinkommen und Profit teilbar sein (siehe BILD 2 und den dazugehörigen Text), wenn man die üblichen Annahmen „konstante Skaleneffekt“, „vollständige Konkurrenz“ und „Maximalprofit“ unterstellen und auf dieser Grundlage Tests durchführen will. Diese Prämisse reduziert das Spektrum der möglichen Operationalisierungen auf eine einzige Variante, nämlich auf das Volkseinkommen, das genau aus diesen beiden Kategorien besteht.⁶ Das Volkseinkommen ist die Summe aus Arbeitsentgelten und Einkommen aus Unternehmertätigkeit und Vermögen. Dies entspricht der vorausgesetzten theoretischen Struktur einer Verteilung des Produkts auf die beiden Hauptklassen einer warenproduzierenden Gesellschaft.⁷

Jede Operationalisierung hat unliebsame Nebeneffekte. Identifiziert man den Output mit dem Volkseinkommen, so könnte der Laie einwenden, dass der Unterschied zwischen Einkommen und Produkt nicht beachtet worden ist. In den Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen sind aber Einkommen nichts anderes als (eventuell um die Kosten reduzierte) Erlöse aus dem Verkauf der Produkte. Das Bruttoinlandsprodukt könnte genauso richtig als im Inland generiertes Einkommen bezeichnet werden. Das Bruttonationaleinkommen ist nichts anderes als das BIP – ergänzt um den Saldo der Auslandseinkommen.

Ein gewichtiger Kritikpunkt an der Operationalisierung „Output = Volkseinkommen“ besteht darin, dass nicht nur das Volkseinkommen in Arbeitsentgelte und den Rest aufgespalten werden muss, sondern „der Rest“, das Einkommen aus Unternehmertätigkeit und Vermögen, nochmals aufgespalten werden müsste, nämlich in den Unternehmerlohn (Unternehmer und ihre mithelfenden Familienangehörigen arbeiten bekanntlich auch) und den reinen Einkommen aus Vermögen. Nur letzteres dürfte – folgt man der klassischen Terminologie – adäquat als Profit (arbeitsloses Einkommen) bezeichnet werden. Demnach muss das Einkommen aus Vermögen der Berechnung der Profitrate zugrunde liegen, indem man es auf dem Wert des Kapitalstocks bezieht.

⁶ Eine ähnliche Problematik lag dem Test des Saldenmechanischen Modells zugrunde, das Fritz Helmedag dazu benutzen wollte, um die Wirkungslosigkeit einer Erhöhung der Mehrwertsteuer auf die Volkswirtschaft nachzuweisen. Vgl. Georg Quaas: Das „saldenmechanische Modell“ von Fritz Helmedag und die Empirie. In: Wirtschaftsdienst, 87. Jg. (2007) H. 6, S. 406-412.

⁷ Andere Ansätze sind natürlich auch möglich, führen aber zu merkwürdigen Interpretationen. So müsste bei der Verwendung eines Bruttoaggregats die Abschreibung dem Profit zugerechnet werden. Außerdem stünde die Frage, wie man Produktsteuern und Subventionen des Staates behandelt.

Dass auch das Kapital mehrere Operationalisierungen zulässt, soll hier nur am Rande erwähnt werden. Von den Schwierigkeiten, den aktuellen Wert des tatsächlich angewandten Kapitals zu bestimmen, ganz zu schweigen.

Aus dieser Vorbemerkung folgt, dass jeder Test einer Theorie unter den Prämissen der jeweiligen Operationalisierung erfolgt. In diesem Abschnitt werden kurz die Ergebnisse von zwei unterschiedlichen Operationalisierungen vorgestellt. Die erste, einfache Variante ergab bei einem Test aufgrund von Daten der deutschen Volkswirtschaft von 1970 bis 2007 recht plausible Ergebnisse und wird hier anhand der Daten von 1950 bis 2016, also einer breiteren Grundlage, wiederholt. Die zweite Variante benutzt dieselben Daten, spaltet aber die Einkommen aus Unternehmertätigkeit und Vermögen in den Unternehmerlohn und das reine Vermögenseinkommen auf, wobei der Unternehmerlohn den Arbeitsentgelten zugerechnet wird. Der Profit liegt zusammen mit dem Wert des Kapitals der Profitrate zugrunde, über die die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion wichtige Aussagen macht. Steuerliche Belastungen spielen bei dieser Untersuchung keine Rolle, da es sich um Aspekte der Primäreinkommen handelt.

Die erste Überprüfung erfolgt anhand der folgenden empirisch beobachtbaren Größen:

Y: Volkseinkommen, in Milliarden €, deflationiert

EW: Anzahl der Erwerbstätigen (Inländerkonzept), in 1000

K: Nettoanlagevermögen, in Milliarden €, deflationiert

YAN: Arbeitsentgelte in Milliarden €, deflationiert

YUV: Einkommen aus Unternehmertätigkeit und Vermögen in Milliarden €, deflationiert

Datenquelle:

Statistisches Bundesamt, siehe unten, Datenquellen.

Die obige Operationalisierung orientiert sich vor allem an Intriligator (1978). Hier die wichtigsten Aussagen zusammengefasst und gelegentlich kommentiert:

„Output is typically measured as value added per year, deflated for price changes in time-series studies.“ (262) Dies würde auf die Bruttowertschöpfung deuten, die aber als einen großen Teil die Abschreibung umfasst, von denen wahrscheinlich heute noch gilt, was der Autor vor 40 Jahren schon feststellte: „Depreciation figures are generally unrealistic, however, since they entail both tax avoidance by the firm and the creation by the tax authorities of incentives to invest via accelerated depreciation.“ (263) Nicht ganz unproblematisch ist außerdem die Frage, welcher Deflator hier zum Einsatz kommen soll.

„Labor input is typically measured as manhours employed per year, but is also sometimes measured as number of employees.“ Die Gruppe der Angestellten ist allerdings nicht die einzige, die am volkswirtschaftlichen Produktionsprozess mitwirkt, deshalb wird hier die Anzahl der Erwerbstätigen verwendet, die unselbständig und selbständig Beschäftigte umfasst. Im achten Abschnitt wird dann eine weitere Eingrenzung vorgenommen, die das Ziel hat, konjunkturelle Schwankungen zu separieren. Das hängt mit der folgenden Anforderung zusammen:

„Only capital that is actually utilized should be treated as an input, so measured capital should be adjusted for capacity utilization.“ (263) Dem war folgende Charakteristik vorausgegangen: „Capital input is typically measured by the net capital stock (net of depreciation)...“ (263)

Intriligator empfiehlt, Daten zum Kapitalstock zu vermeiden, da er sie für nicht valide hält. In diesem Punkt hat sich die Lage inzwischen sicherlich deutlich verbessert.

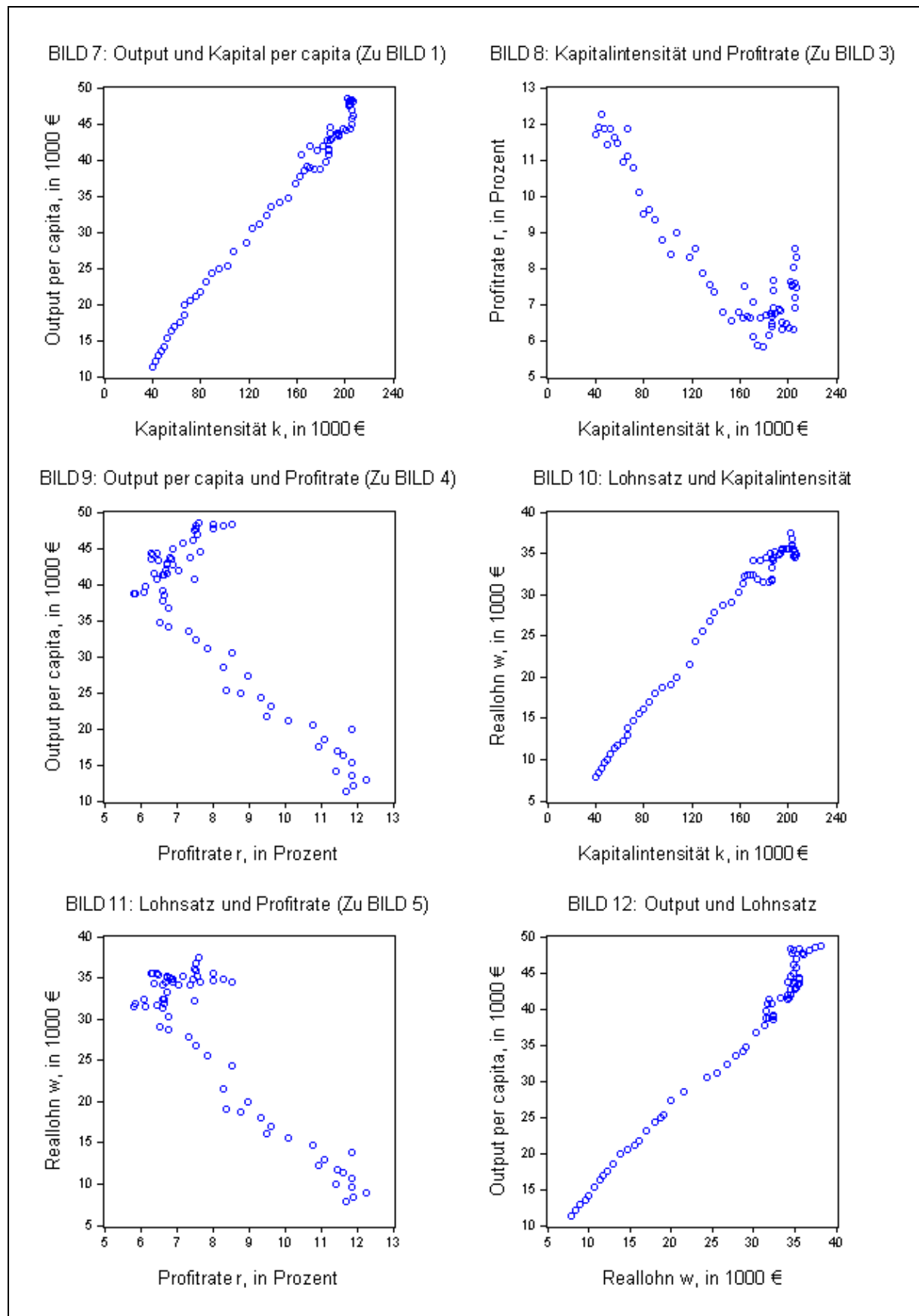


BILD 7-12: Plots der empirischen Verläufe

Bezeichnung	Eigenschaften	x-y-Diagramm	Theorie	BILD	Empirie	BILD
Clark-Ramsey	$y' > 0; y'' < 0$	y; k	Parabel	1, 2	Gerade (?)	7
	$dr/dk = y'' < 0$	k; r	inv. Zus.	3	inv. Zus.*	8
	$dy/dr = y'/y'' < 0$	y; r	inv. Zus.	4	inv. Zus.*	9
	$dw/dk = -ky'' > 0$	W; k	Parabel	--	Gerade (?)	10
	$dw/dr = -k$	W; r	inv. Zus..	5	inv. Zus.*	11
	$dy/dw = 1/(1-a)$	y; w	lin. Zus.	--	lin. Zus.(?)	12

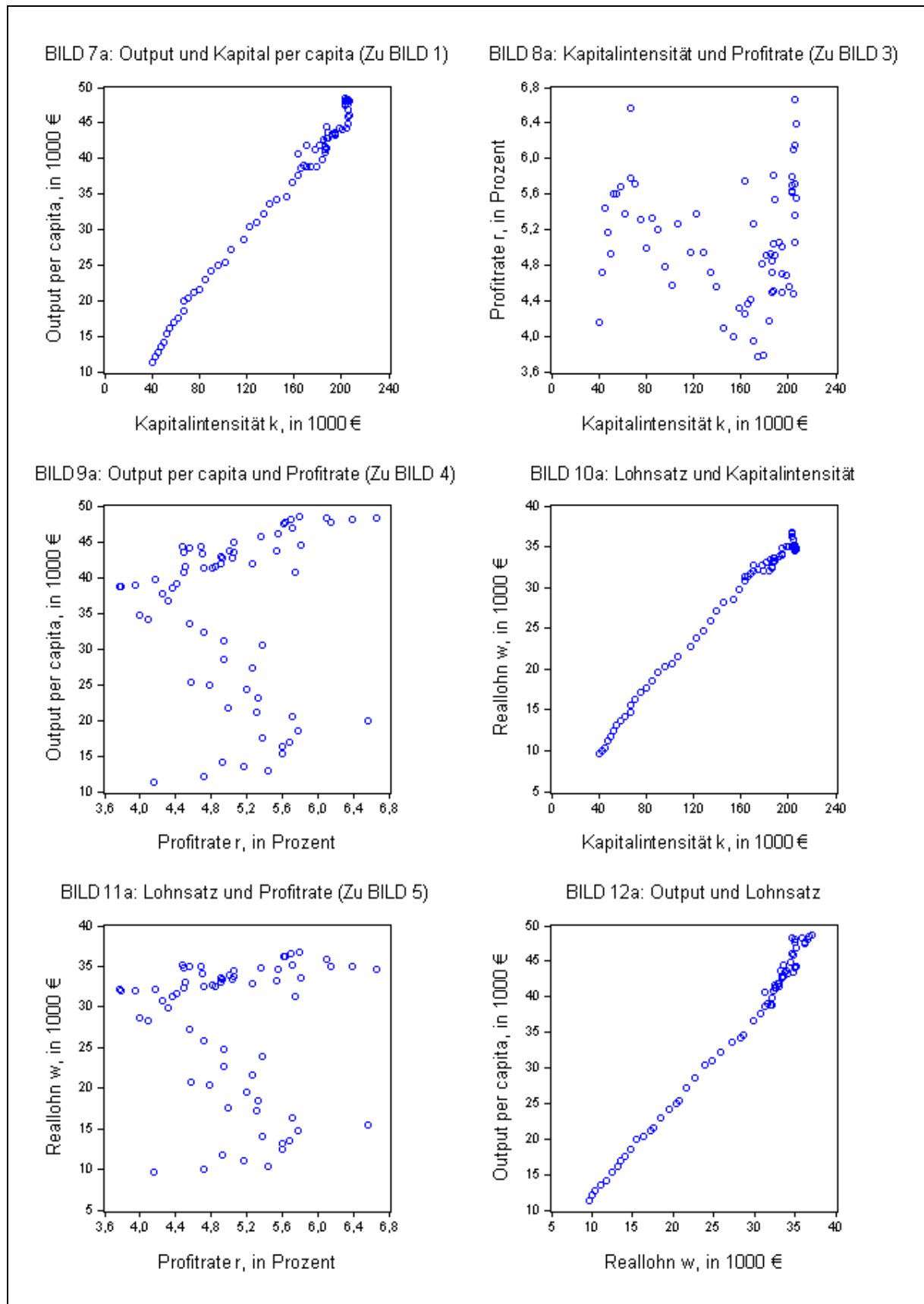
Tabelle 1: Erwarteter und beobachteter Verlauf der neoklassischen Produktionsfunktion und ihrer Ableitungen

Legende:

*Der inverse Zusammenhang zwischen der Kapitalintensität und der Profitrate wird durch die neueren Daten (hohe Werte des Outputs und der Kapitalintensität) infrage gestellt. Diese Daten erscheinen in den Plots als Häufung von Punkten, die entweder keine eindeutige Richtung aufweisen oder aber auf einen gegenläufigen Zusammenhang hinweisen.

(?) Das Fragezeichen bedeutet, dass man die Frage, ob es sich um einen logarithmischen Zusammenhang (hier vereinfachend als Parabel bezeichnet) handelt oder um eine Gerade, nicht entschieden werden kann. Das liegt nicht nur am empirischen Sachverhalt, sondern auch daran, dass sich der Logarithmus bei hinreichend kleinen Variationen, aber hohen Werten, annähernd wie eine Gerade verhält. In diesem Fall würde der Empiriker wohl stets für den einfacheren Zusammenhang optieren, sofern er die Theorie nicht um jeden Preis retten will.

Die folgenden Grafiken zeigen die gleichen Kurven bei einer alternativen, eigentlich genaueren Berechnung der Profite, bei der das Einkommen aus Unternehmertätigkeit und Vermögen in den sog. Unternehmerlohn und in die Einkommen aus Vermögen aufgespalten wird, wobei der Unternehmerlohn den Arbeitsentgelten hinzugefügt wird:



Man sieht, dass sich Korrelationen, an denen der Proftrate beteiligt ist, zu einer Punktwolke verflüchtigen.

7. Die Nelson-Winter-Kritik⁸

Im Folgenden eine Beschreibung der Fakten durch Nelson und Winter (vor 1982!) und ihre Kritik an der neoklassischen Produktionsfunktion. Ein Vergleich mit der Datenlage 1950-2016 ist erforderlich.

„Output (gross national product) has been growing at roughly the same rate as capital [BILD 7] and at a faster rate than labor [BILD 13]; hence, the capital-output ratio has been constant [BILD 14] and output per worker and the capital-labor ratio have risen in the same proportion [BILD 7]. Factor shares have remained constant [BILD 15]; thus the rate of return on capital has been constant and the wage rate has risen [BILD 16]. These ‚facts‘ very roughly characterize the Western economic experience that the growth accounting exercises seek to explain.

These facts are inconsistent with an explanation that interprets growth solely in terms of movement along a neoclassical production function. The rise in output per worker would have been less than the rise in the capital-labor ratio, whereas in fact worker productivity has grown at the same rate as capital intensity... Thus, the production function must have shifted“ (199)

„...it is not merely that movements along preexisting production functions explain little of experienced growth. It is that the idea of movements along the production function into previously unexperienced regions – the conceptual core of the neoclassical explanation of growth – must be rejected as a theoretical concept.“ (201)

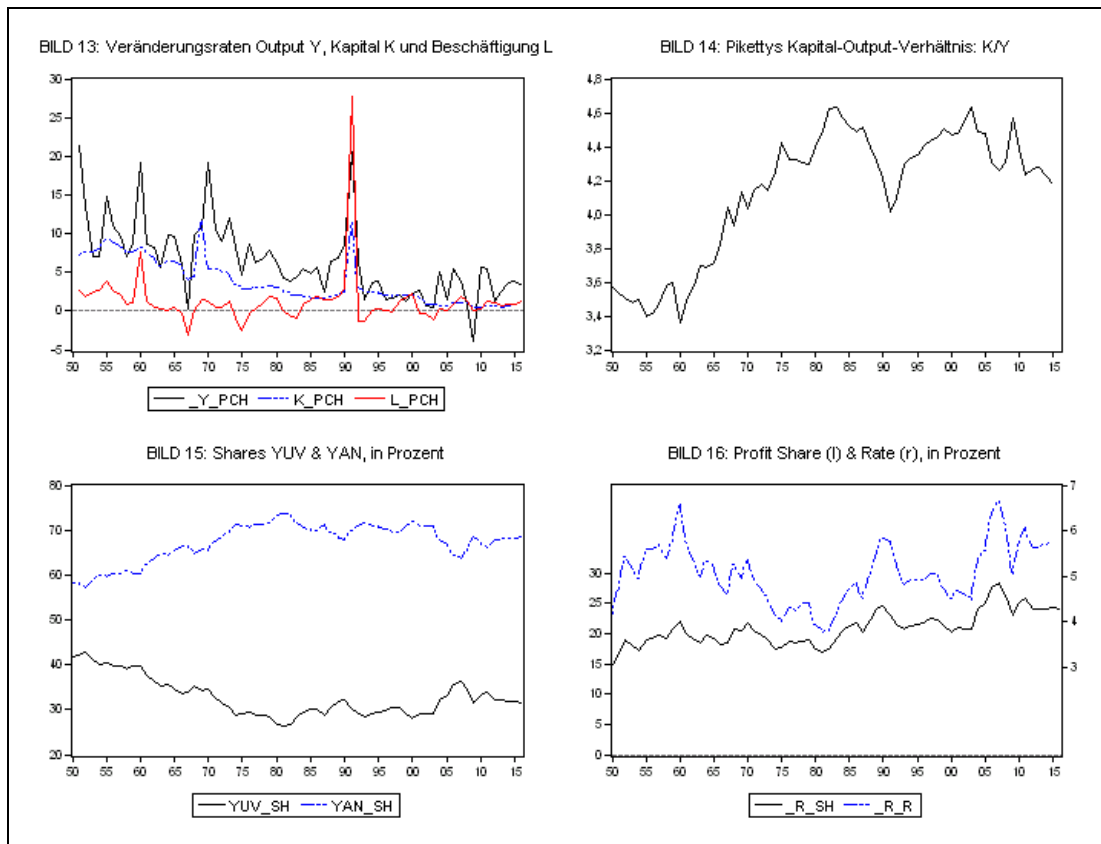


BILD 13-16: Die von Nelson-Winter behaupteten „charakteristischen Fakten“ westlicher Volkswirtschaften

⁸ Richard R. Nelson and Sidney G. Winter: An Evolutionary Theory of Economic Change. 1982.

Legende:

YUV = Einkommen aus Unternehmertätigkeit und Vermögen

YAN = Arbeitsentgelte

Lohnanteil (einschl. Unternehmerlohn) am Volkseinkommen = $1 - \text{„Profitshare“}$

8. Die der CD-Produktionsfunktion entsprechende Regression

Eine einfache Schätzung der Regression einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion ergibt Parameterschätzungen (siehe Tab. 2), die steigende Skalenerträge signalisieren, hoch signifikant erscheinen und eine Erklärung weit über 99 Prozent erlauben. Die Regression aufgrund der Formel von Cobb und Douglas zeigt im Großen und Ganzen die von der neoklassischen Theorie erwarteten Merkmale: Die Parameterwerte liegen im Bereich 0...1, addieren sich allerdings nicht zu 1. Die DW-Statistik signalisiert eine starke Autokorrelation, die die hohe Signifikanz der Parameterwerte in Frage stellt. Der technische Fortschritt liefert über die lange Periode von 1950 bis 2015 keine signifikanten Schätzwerte und ist deshalb nicht dargestellt worden.

TABELLE 2

Dependent Variable: @LOG(Y/BIPPE*100)

Method: Least Squares

Date: 04/07/18 Time: 10:17

Sample (adjusted): 1950 2015

Included observations: 66 after adjustments

@LOG(Y/BIPPE*100) = C(11) + C(12)*@LOG(EW) + C(13)*@LOG(K)

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(11)	-3.273393	0.283813	-11.53362	0.0000
C(12)	0.363049	0.035455	10.23985	0.0000
C(13)	0.772693	0.011421	67.65718	0.0000
R-squared	0.997953	Mean dependent var		6.899533
Adjusted R-squared	0.997888	S.D. dependent var		0.612819
S.E. of regression	0.028160	Akaike info criterion		-4.257450
Sum squared resid	0.049958	Schwarz criterion		-4.157920
Log likelihood	143.4958	Hannan-Quinn criter.		-4.218121
F-statistic	15360.21	Durbin-Watson stat		0.578747
Prob(F-statistic)	0.000000			

Leider ist diese Methode mit einer Reihe von Problemen belastet:

„...a direct estimation ... would be a somewhat questionable procedure, since the explanatory variables $\ln L_i$ and $\ln K_i$ are endogenous variables, jointly determined with $\ln y_i$, and are not independent of the stochastic disturbance term, leading to a problem of simultaneous-equation estimation, specifically an endogenous explanatory variable. They also tend not to be independent of one another, leading to a possible problem of multicollinearity. Furthermore, the variance of the stochastic disturbance term need not be constant, leading to a problem of heteroscedasticity.” (Intriligator: 267)

Des Weiteren wäre inhaltlich zu kritisieren, dass nur der Dienst, den das Kapital tatsächlich im Produktionsprozess geleistet hat, und nicht der gesamte Kapitalstock, berücksichtigt werden sollte. Ähnliches kann vom Arbeitspotenzial gefordert werden. Die Versuche, diese Überlegungen zu operationalisieren, haben u.a. zur Anwendung von sogenannten Filtern geführt, die konjunkturelle (und bei Vierteljahresdaten saisonale) Schwankungen weitgehend

eliminieren, aber auch zu der peak-to-peak-Methode, bei der die konjunkturellen Spitzen eine 100-prozentige Auslastung definieren, die im restlichen Konjunkturzyklus unterschritten wird. Ein weiterer Gesichtspunkt, der mit der Produktionstheorie nur wenig zu tun hat, besteht darin, dass man bei Anwendung dieser Methoden die konjunkturelle Phase, in der sich eine Volkswirtschaft befindet, genauer bestimmen kann.

9. Solows Rekonstruktion der Produktionsfunktion

Unter der Voraussetzung neutralen technischen Fortschritts, ausgedrückt durch die verallgemeinerte Produktionsfunktion

$$Y = T(t) f(K, L), \quad (1)$$

und der Annahme, dass „den Faktoren“ das jeweilige marginale Produkt bezahlt wird, konstruiert Solow eine Methode, mit deren Hilfe man zwischen dem Einfluss des technischen Fortschritts und dem der Veränderungen der Kapitalintensität auf den Output pro Kopf differenzieren kann.⁹ Beobachtet werden an den beiden Zeitpunkten 1 und 2 die beiden Punkte $P_1(k_1, y_1)$ und $P_2(k_2, y_2)$ im y - k -Diagramm. Gesucht ist der Punkt $P_{12}(k_1, y_{12})$ und vor allem die Differenz $\Delta T = P_1 P_{12}$, die den Produktivitätszuwachs widerspiegelt, der allein auf das Konto des technischen Fortschritts geht (BILD 17).

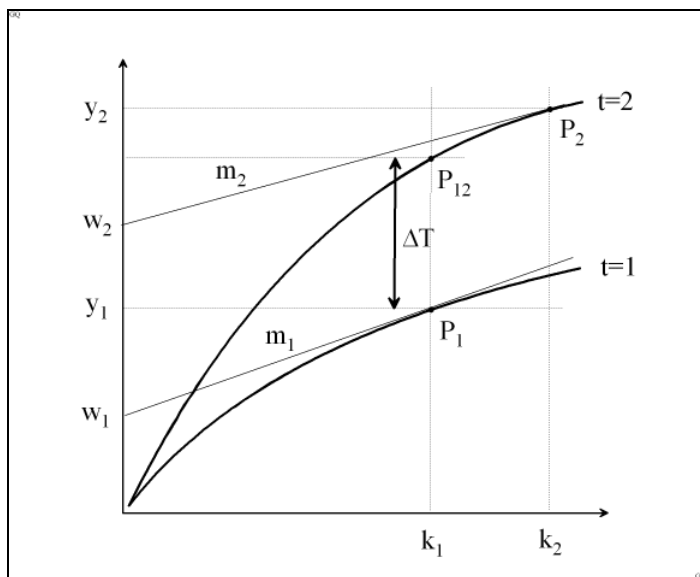


BILD 17

Der y -Wert von P_{12} wird mit Hilfe der Tangente an den Punkt P_2 angenähert. Die Steigung dieser Tangente ist

$$m_2 = \frac{y_2 - w_2}{k_2} = \frac{r_2 k_2}{k_2} = r_2. \quad (2)$$

Als Approximation für den y -Wert des Punktes P_{12} ergibt sich:

⁹ Vgl. Solow 1957. Anstelle von q verwende ich hier y als Symbol für den Output und identifiziere ihn aus strukturellen Gründen mit dem Volkseinkommen (Nettonationalprodukt, vgl. ebd. 314). Anstelle von Solows Symbol A für den technischen Fortschritt wird hier T benutzt.

$$y_{12} \approx y_2 - \frac{\partial y}{\partial k} \Delta k, \quad (3)$$

und für die gesuchte Differenz:

$$\Delta T = y_{12} - y_1. \quad (4)$$

Setzt man (3) in (4) ein, erhält man:

$$\Delta T \approx \Delta y - \frac{\partial y}{\partial k} \Delta k. \quad (5)$$

Man gelangt zu Veränderungsraten, wenn man (5) durch $T = y_1$ teilt:

$$\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{\Delta y}{y_1} - \frac{\partial y}{\partial k} \frac{k_1}{y_1} \frac{\Delta k}{k_1}. \quad (6)$$

An dieser Stelle kommt die Voraussetzung zum Tragen, dass den Faktoren ihr jeweiliges marginales Produkt bezahlt wird, d.h. es gilt:

$$\frac{\partial y}{\partial k} = r. \quad (7)$$

Und damit ergibt sich, dass

$$\frac{\partial y}{\partial k} \frac{k_1}{y_1} = \frac{rk_1}{y_1} = \frac{rK_1}{Y_1} = w_K, \quad (8)$$

wobei w_K der Anteil der Kapitaleinkommen am Gesamteinkommen Y ist. (Streng genommen handelt es sich hier um das Einkommen Y_1 . Dem aufmerksamen Leser wird aufgefallen sein, dass sich die Profitrate r „streng genommen“ auf den Punkt P_2 bezieht. Solow unterstellt hier stillschweigend hinreichend kleine Änderungen, so dass die Profitrate wie der Anteil Kapitaleinkommen als konstant angesehen werden können.)

Mit (8) lässt sich (6) angenähert wie folgt schreiben:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{T}}{T} + w_K \frac{\dot{k}}{k}. \quad (9)$$

Das ist die gesuchte Zerlegung der zeitlichen Veränderung des Outputs pro Kopf in die Veränderungsrate des technischen Fortschritts und die (gewichtete) Veränderungsrate der Kapitalintensität. Man erhält die Veränderungsrate des technischen Fortschritts aus der Wachstumsrate des Einkommens minus dem gewichteten Wachstum des Kapitalstocks, wobei die Wichtung durch den Anteil des Kapitaleinkommens am Gesamteinkommen Y gegeben ist.

$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{\dot{y}}{y} - w_K \frac{\dot{k}}{k} \quad (10)$$

Die folgende Berechnung der Raten des technischen Fortschritts für die Bundesrepublik Deutschland (Tabelle 3) geht davon aus, dass der technische Fortschritt nicht konjunkturabhängig ist. Konjunkturell bedingte Verschiebungen der Produktionsfunktion sollten deshalb vor dem Einsatz der Formel (10) aus den Daten eliminiert werden. Dem entsprechend sind die Zeitreihen für den Output per capita, die Kapitalintensität und dem Anteil des Kapitals am (geglätteten) Output mit einem HP-Filter ($\lambda = 100$) geglättet worden.

TABELLE 3

Jahr	Kapitalstock* Preise von 2010	Anteil des Kapital- einkommens**	Volkseinkommen† je Erwerbstätigen	Kapital- intensität†	$\Delta T/T$	T
1950	812,209	0,16	11,205	39,171	NA	1,000
1951	871,360	0,17	12,001	41,756	0,060	1,060
1952	938,434	0,17	12,799	44,356	0,056	1,119
1953	1010,343	0,18	13,600	46,992	0,052	1,177
1954	1091,459	0,18	14,407	49,690	0,049	1,234
1955	1193,096	0,19	15,221	52,480	0,046	1,291
1956	1298,590	0,19	16,042	55,389	0,043	1,347
1957	1404,792	0,19	16,872	58,442	0,041	1,403
1958	1509,507	0,20	17,713	61,666	0,039	1,457
1959	1624,591	0,20	18,569	65,088	0,037	1,512
1960	1758,176	0,20	19,443	68,746	0,036	1,566
1961	1889,406	0,20	20,335	72,692	0,035	1,620
1962	2018,589	0,20	21,253	76,961	0,033	1,674
1963	2137,317	0,20	22,203	81,572	0,033	1,729
1964	2273,825	0,20	23,192	86,531	0,033	1,786
1965	2419,487	0,20	24,220	91,825	0,032	1,843
1966	2554,037	0,20	25,286	97,428	0,032	1,902
1967	2659,436	0,20	26,391	103,296	0,032	1,963
1968	2780,177	0,20	27,529	109,362	0,032	2,025
1969	3108,619	0,20	28,687	115,552	0,031	2,088
1970	3275,696	0,20	29,847	121,768	0,030	2,150
1971	3450,866	0,19	30,990	127,936	0,028	2,211
1972	3626,383	0,19	32,103	133,993	0,027	2,271
1973	3793,652	0,19	33,173	139,882	0,025	2,327
1974	3924,638	0,19	34,188	145,552	0,023	2,381
1975	4038,971	0,19	35,142	150,946	0,021	2,431
1976	4157,346	0,18	36,028	156,001	0,019	2,477
1977	4281,231	0,18	36,833	160,680	0,017	2,519
1978	4409,946	0,18	37,552	164,972	0,015	2,556
1979	4549,814	0,18	38,188	168,888	0,013	2,588
1980	4688,559	0,18	38,756	172,449	0,011	2,616
1981	4804,387	0,19	39,276	175,670	0,010	2,643
1982	4898,935	0,19	39,774	178,547	0,010	2,668
1983	4995,540	0,19	40,268	181,065	0,010	2,694
1984	5086,622	0,20	40,766	183,214	0,010	2,721
1985	5172,886	0,20	41,272	185,021	0,010	2,749
1986	5263,263	0,21	41,791	186,538	0,011	2,779
1987	5354,883	0,22	42,326	187,839	0,011	2,810
1988	5455,552	0,22	42,880	188,992	0,012	2,843
1989	5571,679	0,23	43,446	190,061	0,012	2,877
1990	5706,299	0,24	44,017	191,095	0,012	2,911
1991	6358,971	0,22	40,985	168,950	-0,044	2,784
1992	6551,156	0,22	41,338	172,854	0,004	2,794
1993	6707,096	0,22	41,687	176,705	0,004	2,804

1994	6870,622	0,21	42,037	180,432	0,004	2,815
1995	7024,033	0,21	42,384	183,972	0,004	2,826
1996	7165,643	0,21	42,727	187,277	0,004	2,838
1997	7301,353	0,21	43,066	190,311	0,004	2,851
1998	7444,649	0,22	43,402	193,059	0,005	2,864
1999	7598,060	0,22	43,742	195,530	0,005	2,879
2000	7749,785	0,22	44,094	197,745	0,006	2,895
2001	7872,008	0,22	44,463	199,724	0,006	2,912
2002	7947,028	0,23	44,848	201,454	0,007	2,932
2003	8009,404	0,23	45,246	202,910	0,007	2,953
2004	8063,351	0,24	45,647	204,067	0,008	2,975
2005	8114,769	0,24	46,033	204,918	0,007	2,997
2006	8194,846	0,25	46,385	205,471	0,007	3,018
2007	8283,352	0,25	46,687	205,757	0,006	3,037
2008	8366,801	0,25	46,940	205,820	0,005	3,053
2009	8387,874	0,25	47,163	205,707	0,005	3,068
2010	8429,177	0,25	47,378	205,456	0,005	3,083
2011	8492,396	0,25	47,590	205,102	0,005	3,098
2012	8553,086	0,25	47,797	204,680	0,005	3,113
2013	8595,232	0,25	48,002	204,221	0,005	3,128
2014	8654,236	0,25	48,211	203,746	0,005	3,144
2015	8715,769	0,24	48,424	203,265	0,005	3,159

* in Mrd. Euro

**Einkommen aus Vermögen je Volkseinkommen

† in 1000 Euro

Das Ergebnis (vor allem die Wachstumsrate der totalen Faktorproduktivität (vgl. Blanchard / Illing, 380f.) hängt stark davon ab, wie das Vermögenseinkommen definiert und welcher Deflator verwendet wird. Der Umfang des Kapitalstocks wird hier wie oben mit dem Nettoanlagevermögen operationalisiert und dieses mit der Preisentwicklung des BIP (Referenzjahr 2010) deflationiert. Dieser Deflator wird auch für andere Aggregate verwendet, obwohl mit Blick auf die Verwendung ebenso der Preisindex des privaten Konsums in Frage käme, der aber in dieser Studie keine Rolle spielt. Aus Gründen der anzustrebenden strukturellen Identität zwischen theoretischem Ansatz und Empirie wurde der Output – wie bereits gesagt – durch das Volkseinkommen operationalisiert. Die Arbeitsentgelte sind mit den sog. „Unternehmerlöhnen“ (deren Höhe pro Kopf mit dem durchschnittlichen Lohnsatz der Arbeitnehmer übereinstimmt) zusammengefasst worden. Das dann noch verbleibende Residuum des Volkseinkommens ist das reine Kapitaleinkommen, traditionell als Profit bezeichnet. Der Anteil dieses arbeitslosen Einkommens am Volkseinkommen wird in Spalte 3 berichtet. Die folgenden Spalten bedürfen keiner weiteren Erläuterung.

Der durch die Vereinigung der beiden deutschen Staaten verursachte statistische Bruch macht sich im Jahr 1991 als eine Verschiebung der Produktionsfunktion um -5,6 Prozent bzw. geglättet -4,4 Prozent bemerkbar. Dieser Einbruch wird durch die Auswirkungen der globalen Finanz- und Wirtschaftskrise 2009 mit -5,8 Prozent noch leicht übertroffen, ist aber anhand der geglätteten Kurven nicht zu bemerken.

Mit Hilfe des Faktors T für den technischen Fortschritt lässt sich der beobachtete Output per capita auf die Werte reduzieren, die sich ohne technischen Fortschritt allein durch die Kapitalakkumulation ergeben hätten. Diese Werte sind die Basis für eine vom technischen Fortschritt bereinigte Produktionsfunktion Y_KOR , die wir im Folgenden als „wahre Produktionsfunktion“ bezeichnen.

Skeptiker werden bezweifeln, dass man der alten und der neue Bundesrepublik eine einheitliche Produktionsfunktion unterstellen kann. Um dieser Kritik aus dem Weg zu gehen, wurden die beiden Zeiträume 1950-1990 und 1991-2015 separat behandelt und dem entsprechend zwei „wahre Produktionsfunktionen“ geschätzt, die sich allerdings nur geringfügig voneinander unterscheiden. Die rechnerische Grundlage für die Bestimmung der wahren Produktionsfunktion sind die geglätteten (pro-Kopf-) Zeitreihen sowie Formel

$$\log(y) = c_1 + (1 - \alpha) \log(k) + u_i$$

mit der Probleme der „Multikollinearität“ und „Heteroskedasizität“ reduziert werden. Allerdings setzt die Formel voraus, dass sich die Elastizitäten der Faktoren Kapital und Arbeit zu 1 addieren und darüber hinausgehende Effekte anderweitig erklärt werden müssen (siehe auch Abschnitt 11). Der Parameter $\beta = 1 - \alpha$ beträgt in der alten Bundesrepublik 0,19 und in der neuen fast 0,22.

Mit Hilfe der Daten für den technischen Fortschritt lässt sich die wahre Produktionsfunktion Jahr für Jahr in die Nord-Ost-Richtung der Grafik verschieben (expandieren) und so eine ganze Schar von Produktionsfunktionen erzeugen. Für jedes Jahr erhält man auf diese Weise eine um den Faktor des technischen Fortschritts verschobene Funktion, die allerdings nur mit einem einzigen beobachteten Punkt übereinstimmt (Niveau und erste Ableitung). BILD 18 zeigt die wahre Produktionsfunktionen $_Y_KOR$, die mit einem kleinen ökonometrischen Modell für alle Werte der Kapitalintensität erzeugt worden ist ($_Y_KOR(1)$), sowie die beobachteten Werte des durchschnittlichen Volkseinkommens je Erwerbstätigen ($_Y$).

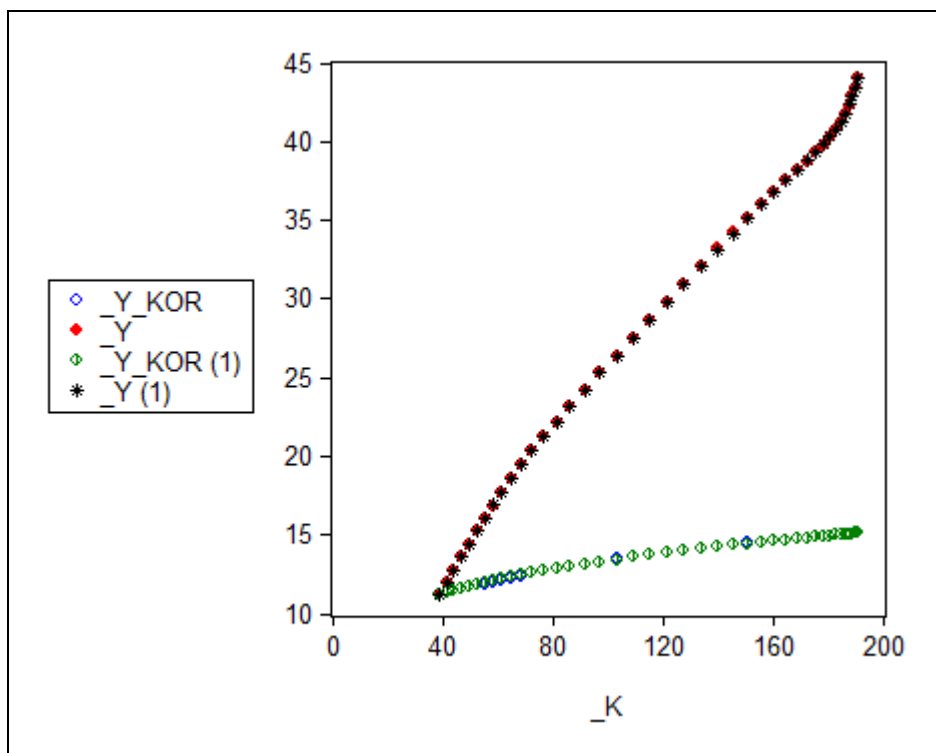


BILD 18: Wahre Produktionsfunktion und Output per capita 1950-1990

Die Treffer der aufgrund der Funktionen rekonstruierten Daten sind zwangsläufig perfekt, da die Schar der Produktionsfunktionen so konstruiert wird. Die Abbildung zeigt im großen Ganzen die theoretisch erwartete konkave Kurve, allerdings nicht mehr für die letzten Jahre.

BILD 19 fokussiert sich auf den Zeitraum nach 1991. Die wahre Produktionsfunktion wurde dafür neu geschätzt.

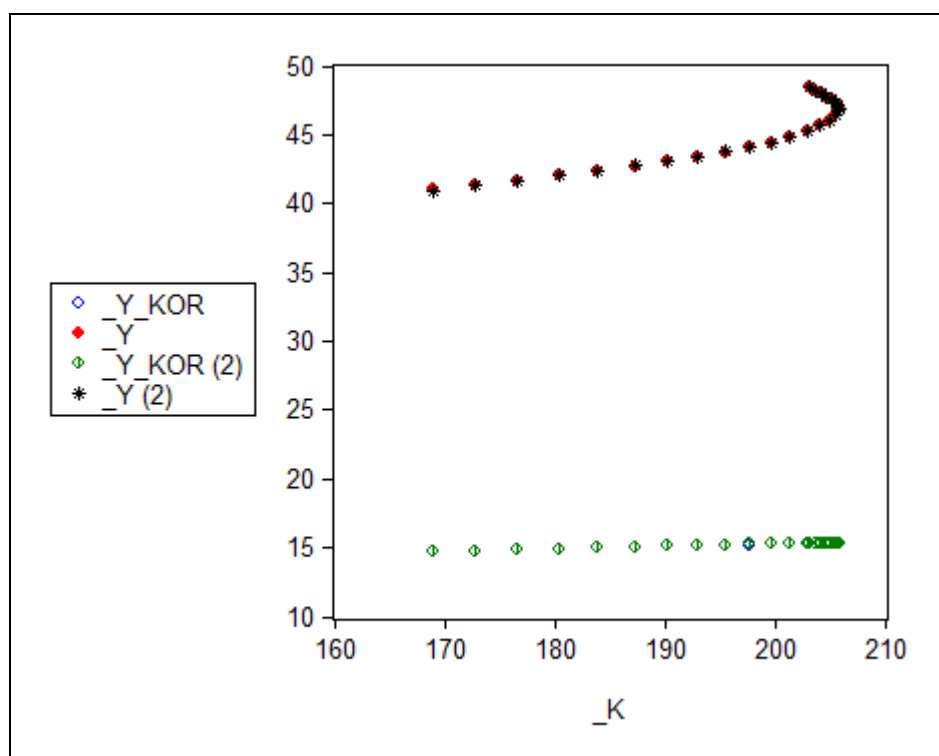


BILD 19: Wahre Produktionsfunktion und Output per capita 1991 - 2016

Die Grafik zeigt, dass man es seit ca. 2005 mit einem atypischen Verlauf zu tun hat: trotz stagnierender und sogar sinkender Kapitalintensität wächst die Produktivität. Die Denkmöglichkeit, es handle sich um einen steady-state-Verlauf, muss mit Blick auf die Krise 2008/09 ausgeschlossen werden.

10. Überprüfung der „wahren“ Produktionsfunktion

In die Konstruktion der wahren Produktionsfunktion ist die Annahme eingegangen, dass den Faktoren ihr Grenzprodukt gezahlt wird. Das ist eine Hypothese, die von der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion separiert werden kann. So stellt Douglas in seiner letzten Publikation fest: „The results of this study lend further corroboration to the accuracy of the production function as a description of manufacturing production and as a determinant of the distribution of the product—which is a separate but allied subject.” (Douglas 1976: 913)

Einer Überprüfung der Solow’schen Schar von Produktionsfunktionen sind enge Grenzen gesetzt. Da jede Funktion qua Konstruktion im Niveau und in der mit der Verteilungstheorie konformen ersten Ableitung genau mit einem einzigen beobachteten Datenpunkt übereinstimmt und weitere Datenpunkte (bei Fixierung des jeweiligen Jahres) nicht bekannt sind, lassen sich nur Abweichungen der Theorie von der Empirie erkennen, die mit der approximativen Methode zu tun haben: Das ist vor allem die Bestimmung des Punktes P_{12} mit Hilfe einer Tangente des Anstiegs m_2 , der (der Verteilungstheorie entsprechend) durch den Anteil des Kapitaleinkommens am Output bestimmt wird. Diese lineare Näherung wird hier als Ansatzpunkt für eine empirische Überprüfung benutzt.

Zur Überprüfung wird die erste Ableitung der Produktionsfunktion des Jahres t am Punkt t durch den Differenzenquotient zwischen den Werten des Jahres $t+1$ und des Jahres $t-1$ bestimmt. Die Richtung der so konstruierten Sekante sollte annähernd mit der der Tangente im Punkt t übereinstimmen. Sie wird auf den Schnittpunkt mit der y -Achse (Output per capita) projiziert. Der Verteilungstheorie zufolge sollte mit dem Schnittpunkt der Lohnsatz per capita identisch sein. BILD 20 vergleicht den beobachteten mit dem erwarteten Lohnsatz, der sich aus der Theorie ergibt (beide als Realgrößen).

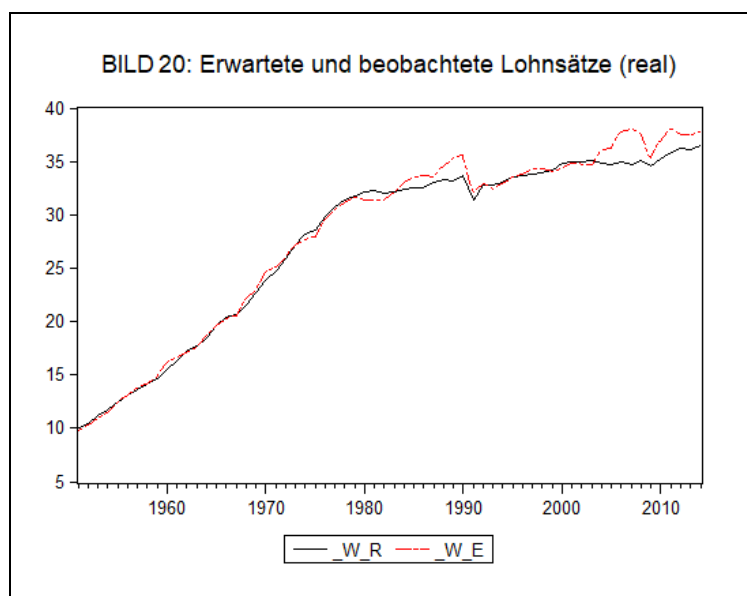


BILD 20

Die Grafik zeigt in den 80iger Jahren und ab 2003 stärkere Abweichungen des beobachteten Reallohnes von dem Lohn, der sich aus einer Anwendung der Verteilungstheorie hätte erwartet werden können. Diese Abweichungen sind jedoch nicht normativ zu verstehen, sondern als Zeichen dafür, dass die CD-Produktionsfunktion in den betreffenden Zeiträumen weniger genau zutrifft. Diese Abweichungen ergeben sich auch, wenn man von den geglätteten Kurven ausgeht. Um dem Einwand zu begegnen, die Abweichungen würden auf dem Effekt des HP-Filters am Ende einer Periode ergeben, sind hier die Rohdaten dargestellt worden.

Dass die Abweichungen nach der deutschen Einheit zunehmen, sieht man bereits anhand der Kurven. Gemessen am Root Mean Squared Percentage Error ergibt sich für 1951-1990 eine Abweichung von 2,34 Prozent, und nach der deutschen Einheit 1991-2014 eine Abweichung von 3,93 Prozent.

11. Wachsende Skalenerträge

In die Regression für y (Output je Beschäftigteinheit) lässt sich bei empirischen Schätzungen neben k immer noch die Arbeit als signifikanter Regressor einfügen. Daraus darf man schließen, dass die Produktionsfunktion in höherem Maße von Arbeit abhängt, als die Bedingung $a + b = 1$, die konstante Skalenerträge nach sich zieht, besagt.

Eine Verallgemeinerung der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion stellt die CES-Produktionsfunktion mit konstanten Skalenerträgen dar, die ihrerseits auf eine CES-Produktionsfunktion mit wachsenden Skalenerträgen verallgemeinert werden kann, deren funktionale Form durch

$$Y = A \left[\delta L^{-\beta} + (1-\delta) K^{-\beta} \right]^{-h/\beta} \quad (1)$$

gegeben ist. Für $\beta \rightarrow 0$ erhält man eine verallgemeinerte Cobb-Douglas-Produktionsfunktion der Form

$$Y = AL^{h\delta} K^{h(1-\delta)} \quad \text{mit } h \neq 1. \quad (2)$$

Eine Säule der neoklassischen Theorie ist die Profitmaximierung unter der Bedingung freier Konkurrenz, die mathematisch bedeutet, dass die Preise als Konstante behandelt werden können. Maximaler Profit liegt vor, wenn

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{w}{p} \quad (3)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{r}{p}. \quad (4)$$

Auf der anderen Seite gilt:

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = h\delta \frac{Y}{L} \quad (5)$$

und

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = h(1-\delta) \frac{Y}{K} \quad (6)$$

woraus nach Gleichsetzen von (5) mit (3) und von (6) mit (4) folgt:

$$wL = h\delta pY \quad (7)$$

$$rK = h(1-\delta) pY \quad (8)$$

Nach Aufsummieren ergibt sich:

$$wL + rK = h\delta pY + h(1-\delta) pY = hpY \quad (9)$$

Dies steht im Widerspruch dazu, dass der (preislich bewertete) Output auf die beiden Produktionsfaktoren L und K aufgeteilt werden muss, also

$$wL + rK = pY. \quad (10)$$

In der Literatur wird dieses Problem durch die Begriffe „product exhaustion“ und „Euler’s Theorem“ reflektiert.¹⁰ Verwendet man letzteres, erhält man eine allgemeinere Formulierung

¹⁰ James M. Buchanan, Yong J. Yoon : Generalized Increasing Returns, Euler’s Theorem, and Competitive Equilibrium. In: History of Political Economy 31.3 (1999) 511-523.

des Problems, das sich dann auf alle homogenen Produktionsfunktionen ersten Grades bezieht. Für diese gilt nämlich:

$$Y(L, K) = \frac{\partial Y}{\partial L} L + \frac{\partial Y}{\partial K} K . \quad (11)$$

Benutzt man nun die Profitmaximierung unter freier Konkurrenz, d.h. Gl. (3) und (4), erhält man (10). Doch diese Gleichung widerspricht dem Fall wachsender oder fallender Skalenerträge (9).

Die Gleichung (10) konstatiert, dass sich die Faktoreinkommen zum gesamten Output aufsummieren (adding-up theorem, Intriligator: 264). Buchanan und Yoon (1999) formulieren diese Eigenschaft wie folgt:

„In its distribution theory application, Euler’s theorem states that payments to all inputs in accordance with separate marginal value products, exhaust the total product value when the production function that relates input to output exhibits the properties indicated. Economists are familiar with these properties under the postulate of constant returns.” (Ibid. 516)

Aus der Sicht dieser beiden Autoren gibt es jedoch keinen Widerspruch zwischen (9) und (10). Die Produktionsfunktion eines Unternehmens sei vom Cobb-Douglas-Typ, d.h., sie impliziere konstante Skalenerträge. Wenn das Unternehmen angesichts großer oder wachsender Märkte und der damit verbundenen Möglichkeit der arbeitsteiligen Spezialisierung der Produktion wachsende Skalenerträge anstrebt und realisiert, dann wechselt es die Technologie, so dass sich seine ursprüngliche Produktionsfunktion verschiebt, so dass im Input-Output-Diagramm eine nach oben gebogene Kurve zustande kommt, die wachsende Skalenerträge reflektiert. Aber dies sei keine Produktionsfunktion (vgl. ebd. S. 518-521).

Buchanan und Yoon schlagen demnach 1999 eine Lösung des Problems vor, die man bereits von Solow 1957 kennt, nämlich anzunehmen, dass sich die Produktionsfunktionen verschieben – bei Solow war es der technische Fortschritt und bei Buchanan und Yoon ist es die von Adam Smith entdeckte arbeitsteilige Spezialisierung, die diese Verschiebungen bei wachsenden (Außen-) Märkten bewirken soll.

Festzustellen bleibt, dass sich die Entwicklung der bundesdeutschen Volkswirtschaft nicht allein durch Wachstumsschübe der beiden hauptsächlichen Faktoren, Arbeit und Kapital, vollzieht, sondern auch durch sporadische, zumeist aber positive Produktivitätssprünge, die als Verschiebung einer wahren Produktionsfunktion konstruiert werden können und deren Grundlage in technologischen Neuerungen oder arbeitsteiligen Spezialisierungen gesehen wird, wobei vermutlich beides eine Rolle spielt. „Das Anwachsen dieses [technologischen] Wissens kennzeichnet den Wandel der Produktion“ (Witt 2004: 38 (25)), auch wenn Evolutoriker diesem Prozess bislang keine Aufmerksamkeit gewidmet haben. Die Tatsache, dass in den letzten 10 Jahren der (tendenziell sinkende) Zuwachs des Kapitalstocks in etwa dem der Beschäftigung entspricht, so dass die Kapitalintensität zwar annähernd konstant bleibt, die Produktivitätsschübe aber trotzdem stattfinden, entlastet ein wenig die ansonsten bedrohlich anmutende Tatsache einer immer geringeren Nettoinvestition in die Wirtschaft. Zu denken sollte allerdings die Tatsache geben, dass die Verschiebung der Produktionsfunktion tendenziell abnimmt. Im Lichte der neoklassischen Produktionstheorie müsste dies als nachlassende Innovationsfreudigkeit der deutschen Wirtschaft gedeutet werden.

12. **Anhang:** Anmerkungen zur Schätzmethode

Das folgende Modell reduziert die Probleme der Kollinearität und Heteroskedastizität. Das Endogenitätsproblem wird durch eine zweite Gleichung und eine Systemschätzung beider Gleichungen mit der Methode Maximum Likelihood berücksichtigt und weiter mit der Schätzung der Einzelgleichungen mit OLS verglichen. Die ML-Schätzung wird mit LISREL durchgeführt. Die Strukturgleichung lautet:

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{x} + \boldsymbol{\zeta}$$

Dabei sind:

$$\mathbf{y} = \begin{vmatrix} y \\ k \end{vmatrix}; \mathbf{x} = \begin{vmatrix} T \\ r \\ t \end{vmatrix} \text{ bzw. } \mathbf{x} = \begin{vmatrix} T \\ d91f \\ r \\ t \end{vmatrix}; \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 & \beta_{12} \\ \beta_{21} & 0 \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & 0 & \gamma_{13} \\ 0 & \gamma_{22} & \gamma_{23} \end{vmatrix} \text{ bzw. } \mathbf{\Gamma} = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & 0 & \gamma_{14} \\ 0 & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} \end{vmatrix}$$

Legende:

y = Output per capita

k = Kapitalintensität

$d91f$ = Dummy deutsche Einheit

T = Index des technischen Fortschrittes

r = Profitrate

t = Jahr

Von allen Variablen wurde der Logarithmus genommen, ausgenommen die Dummy-Variable und die Profitrate.

Parameterwerte der ML- und OLS-Schätzungen 1950-1990

	K	T	t
y	BE (1, 2)	GA (1, 1)	GA (1, 3)
ML	0.201102	0.990612	-0.355313
OLS	0.201580	0.989965	-0.361855
	Y	r	t
K	BE (2, 1)	GA (2, 2)	GA (2, 3)
ML	1.049163	-0.057912	10.28558
OLS	1.059668	-0.057641	9.595830

Parameterwerte der ML- und OLS-Schätzungen 1991-2015

	K	T	t
y	BE (1, 2)	GA (1, 1)	GA (1, 3)
ML	0.217904	0.936580	-0.078982
OLS	0.219357	1.001523	-0.142815
	Y	r	t
k	BE (2, 1)	GA (2, 2)	GA (2, 3)
ML	0.968266	-0.007557	2.110074
OLS	2.024055	-0.073935	-8.149973

Parameterwerte der ML- und OLS-Schätzungen 1950-2015

	k	T	D91F	t
y	BE (1, 2)	GA (1, 1)	GA (1, 2)	GA (1, 4)
ML	0.240675	0.920815	0.017841	-1.044323
OLS	0.198536	0.984960	-0.003525	0.181239
	y	D91F	r	t
k	BE (2, 1)	GA (2, 2)	GA (2, 3)	GA (2, 4)
ML	1.158363	0.034933	-0.063001	0.614751
OLS	1.134239	-0.026985	-0.056877	4.374751

Die Gleichung für das Kapital ist theoretisch wenig durchdacht und zeigt in der Periode 1991-2015 eine starke Abhängigkeit von der Schätzmethode. Dagegen reagiert die Gleichung für den Output weniger stark darauf. Allerdings sind die Fehlermaße der ex post-Prognose im Fall ML-geschätzter Gleichungen selten besser als die der OLS-geschätzten Gleichungen.

Root Mean Squared Percentage Errors

	1950-1990			1991-2015			1950-2015		
	ML	OLS	%	ML	OLS	%	ML	OLS	%
Y	0,50	0,50	99,9	0,84	0,78	107,5	1,37	0,58	234,0
y	0,16	0,16	99,6	0,22	0,20	108,6	0,39	0,17	231,7
K	2,39	2,40	99,8	3,95	3,54	111,5	3,96	2,81	141,1
k	0,52	0,53	99,6	0,75	0,67	111,0	0,80	0,58	138,7

Aus diesem Grund liegen dem BILD 20 OLS-Schätzungen für beide Zeitabschnitte zugrunde.

13. Literatur

Blanchard, Oliver; Gerhard Illing (2003): Makroökonomie. München

Buchanan, James M.; Yong J. Yoon (1999): Generalized Increasing Returns, Euler's Theorem, and Competitive Equilibrium. In: History of Political Economy 31.3 (1999) 511-523

Christiaans, Thomas (2004): Neoklassische Wachstumstheorie,
URL: <http://dokumentix.ub.uni-siegen.de/opus/volltexte/2005/91/pdf/christiaans.pdf>,
zuletzt abgerufen am 09.04.2018

Cobb, Charles W., Paul H. Douglas (1928): A Theory of Production. In: The American Economic Review, Vol. 18, No. 1, Supplement, Papers and Proceedings of the Fortieth Annual Meeting of the American Economic Association (Mar., 1928), pp. 139-165

Douglas, Paul H. (1976): The Cobb-Douglas Production Function Once Again: Its History, Its Testing, and Some New Empirical Values. In: Journal of Political Economy, 1976, vol. 84, no.5, pp. 903-915

Helmedag, Fritz (1992): Warenproduktion mittels Arbeit. Marburg 1992

Intriligator, Michael D. (1978): Econometric Models, Techniques and Applications. North-Holland

Nelson, Richard R.; Sidney G. Winter (1982): An Evolutionary Theory of Economic Change. 1982

Ott, Alfred E., Harald Winkel (1985): Geschichte der theoretischen Volkswirtschaftslehre. Göttingen 1985

Piketty, Thomas (2014): Das Kapital im 21. Jahrhundert. München

Quaas, Georg (2007): Das „saldenmechanische Modell“ von Fritz Helmedag und die Empirie. In: Wirtschaftsdienst, 87. Jg. (2007) H.6, S.406-412

Solow, Robert M. (1956): A Contribution to the Theory of Economic Growth. In: The Quarterly Journal of Economics, Vol. 70, No. 1 (Feb., 1956), pp. 65-94

Solow, Robert M. (1957): Technical Change and the Aggregate Production Function. In: The Review of Economics and Statistics, Vol. 39, No. 3 (Aug., 1957), pp. 312-320

Witt, Ulrich (2004): Beharrung und Wandel – ist wirtschaftliche Evolution theoriefähig? In: EWE 15 (2004) 1, S. 33-48

14. Datenquellen

Statistisches Bundesamt (StBA): Reproduzierbares Sachvermögen am Jahresanfang nach Vermögensarten, Früheres Bundesgebiet, in DM zu Wiederbeschaffungspreisen, deutsche VGR, 1950-1960. Bearbeitung: Jahresanfangswerte sind als Jahresendwerte des vorangegangenen Jahres verbucht worden.

StBA: Reproduzierbares Sachvermögen nach Vermögensarten, Früheres Bundesgebiet, in DM zu Wiederbeschaffungspreisen, deutsche VGR, 1960-1995

StBA: Kapitalstock, Früheres Bundesgebiet bis 1990/91

StBA: Volkswirtschaftliche Gesamtrechnungen, Fachserie 18 Reihe S.29, Inlandsproduktberechnungen, Revidierte Jahresergebnisse 1970-1991. Erschienen am 05.09.2006.

StBA: Anlagevermögen des Staates nach Sektoren, Arbeitsunterlage 2006. (Alte VGR)

StBA: Volkswirtschaftliche Gesamtrechnungen, Fachserie 18 Reihe 1.5, Inlandsproduktberechnungen, Lange Reihen ab 1970, erschienen am 08.09.2008.

StBA: Volkswirtschaftliche Gesamtrechnungen, Fachserie 18 Reihe 1.5, Inlandsproduktberechnungen, Lange Reihen ab 1970, 2010, erschienen am 01.03.2011.

StBA: Volkswirtschaftliche Gesamtrechnungen, Anlagevermögen nach Sektoren, Arbeitsunterlage 2009, erschienen am 24. August 2010.

StBA: Volkswirtschaftliche Gesamtrechnungen, Fachserie 18 Reihe 1.5, Inlandsproduktberechnung, Lange Reihen ab 1970, 2015, erschienen am 06.04.2016.

StBA: Anlagevermögen nach Sektoren, Arbeitsunterlage 2014, erschienen am 26. August 2015 / korrigiert am 24.09.2015.

StBA: Volkswirtschaftliche Gesamtrechnungen, Inlandsproduktberechnung, Lange Reihen ab 1970, 2010, erschienen am 01.03.2011.

StBA: Volkswirtschaftliche Gesamtrechnungen, Fachserie 18 Reihe 1.4, Inlandsproduktberechnung, Detaillierte Jahresergebnisse, 2015, aktualisiert am 06.04.2016.