About the mathematical structure of the form of value of Karl Marx in 'Das Kapital'

Schneider, Herbert

26 July 2018

Zur mathematischen Struktur der Wertformen von Karl Marx in "Das Kapital"

Herbert Schneider*

July 26, 2018

Abstract

Betrachtet man die Wertformanalyse von Karl Marx im ersten Abschnitt von "Das Kapital" aus mathematischer Sicht, so findet man Strukturelemente der mathematischen Kategorientheorie. Dies ist der Limes von Kegeln, wodurch der Begriff des Geldes die Darstellung des kategorialen Produktes der Waren enthält. Ebenso die kategoriale Auffassung eines Unterobjektes als Morphismus, welche in dem Begriff des Wertes einer Ware enthalten ist.

1 Einleitung

In der zweiten Hälfte des 19ten Jahrhunderts wurde "Das Kapital" [1] von Karl Marx veröffentlicht. Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit der Analyse der Ware. In der Mathematik wurde im Jahr 1945 von Eilenberg und MacLane [2] die mathematische Kategorientheorie [3],[4] begründet. In beiden Fällen finden sich analoge Strukturen. Die Eigenschaften von Objekten sind allein mit Hilfe ihrer gegenseitigen Bezüge zu bestimmen und darzustellen. Dies gibt Anlass mathematische Strukturen der Wertformen zu betrachten.
In der mathematischen Kategorientheorie werden Begriffe mit Hilfe der Kategorie selbst dargestellt. Die Marxsche Analyse dagegen erhält ihre direkte Darstellung im ökonomischen Prozess und beschreibt damit diesen. In dieser Hinsicht sind die beiden Vorgehensweisen verschieden.

In [5, Seite 641ff (Anhang zur Erstausgabe des "Kapitals")] betrachtet Marx Reihungen von Tauschakten (siehe die dortigen Formelbilder) und gewinnt daraus die Äquivalentware. Aus Sicht der Kategorientheorie können diese Reihungen als Kegel aufgefasst werden und damit als Limes dieser Kegel die Äquivalentware als kategoriales Produkt. Ein kategoriales Produkt ist eine universelle Konstruktion. Hiervon ausgehend lassen sich, dem Marxschen Verständnis entsprechend vgl. [5, Seite 648 Zeile 30ff], den Wertformen mathematische Strukturen zuordnen.

Im Folgenden wird der Begriff "Kategorie" immer im Sinne der mathematischen Kategorientheorie verwendet. Bei dem Begriff "Produkt" bestimmt dies

*Hiltenspergerstr.2, 80798 München, EMail: phys_math_analysen@gmx.de

der Zusammenhang. Ein Marxscher Begriff wird definitorisch kursiv angegeben. Die Marxsche Wertanalyse wird als bekannt vorausgesetzt, die mathematischen Strukturen werden dargestellt.
Der Aufbau der Untersuchung ist: Ausgangspunkt ist die Darstellung der Tauschsphäre als Kategorie. Der Begriff des kategoriellen Produktes wird eingeführt und der Zusammenhang mit der Äquivalentware und ihrer Darstellung durch Geld hergestellt. Der Marxschen Methode der Ableitung der Äquivalentware wird eine allgemeinen Methode der Kategorientheorie zugeordnet.
In Analogie zur kategorialen Fassung der Mengenlehre wird, ausgehend von dem universellen Objekt Äquivalentware, das Unterobjekt Wert einer Ware definiert. Die so gewonnenen Strukturen werden auf den Fall eines Tausches zweier Waren herunterprojeziert. Damit zeigt sich wie diese Strukturen sich in die einfachen Wertformen einordnen.
Sodann wird die quantitative Struktur der Waren berücksichtigt. Damit können den zuvor gewonnen Strukturen, quantitative Strukturen zugeordnet werden. Es wird sodann betrachtet, dass zur Herstellung einer Ware konkrete Arbeit aufgewendet wird. Dies führt zum Tauschwert.
Abschliessend wird eine Tauschsphäre, die nur aus zwei Waren besteht, daraufhin betrachtet, wie das zuvor Erkannte sich dort wiederfindet. Dies ist bekanntlich der Ausgangspunkt von Marx.

2 Mathematische Strukturen

2.1 Tauschsphäre als Kategorie

Die Tauschsphäre kann als Kategorie [3],[4] gefasst werden. Diese Kategorie, die Tauschkategorie, wird hier mit $\mathfrak{T}$ bezeichnet. Die Klasse der Objekte, der Waren, dieser Kategorie wird durch $Ob(\mathfrak{T})$ bezeichnet. Die Klasse der Morphismen durch $Mor(\mathfrak{T})$ bezeichnet. Die Klasse der Morphismen von dem Objekt A zu dem Objekt B wird durch $Mor_{\mathfrak{T}}(A, B)$ oder abkürzend durch $Mor(A, B)$ bezeichnet.

Ein Morphismus von dem Objekt A, der Ware A, zu dem Objekt B, der Ware B, wird bezeichnet durch t_{AB} und ist hier definiert durch den Warentausch

$$t_{AB} := \text{"Die Ware A tauscht gegen die Ware B"}\,. \tag{1}$$

Die Pfeildarstellung dieses Morphismus ist

$$t_{AB} : A \to B\ .$$

A heisst Quelle und B Ziel des Pfeiles. Es gilt

$$Mor_{\mathfrak{T}}(A, B) = \{t_{AB}\}$$
$$Mor_{\mathfrak{T}}(B, A) = \{t_{BA}\}\,.$$

Diese Klassen der Morphismen haben jeweils genau ein Element. Der Identitätsmorphismus des Objektes A wird durch id_A bezeichnet. Es gilt

$$Mor_{\mathfrak{T}}(A, A) = \{id_A\}\,.$$

Auch diese Klassen der Morphismen haben jeweils genau ein Element.
Für die Morphismen der Tauschsphäre gilt: Wenn 'A tauscht mit B' und 'B tauscht mit C' gilt, so gilt "A tauscht mit C'. Die Pfeildarstellung ist:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "t_{AB}"] \arrow[rr, bend right, "t_{AC}"'] & B \arrow[r, "t_{BC}"] & C \end{tikzcd}\,.$$

Dies definiert eine Verknüpfung, bezeichnet durch '$\circ$'.

$$t_{BC} \circ t_{AB} = t_{AC}\,.$$

Für diese Verknüpfung gilt

$$\begin{aligned} & t_{BC} \circ t_{AB} = t_{AC} && \text{Existenz der Verknüpfung} \\ & (t_{CD} \circ t_{BC}) \circ t_{AB} = t_{CD} \circ (t_{BC} \circ t_{AB}) && \text{Assoziativität}\,. \\ & id_A \circ id_A = id_A && (2) \\ & id_B \circ t_{AB} = t_{AB} \circ id_A = t_{AB}\ . && (3) \end{aligned}$$

Die Assoziativität ist inhaltlich gegeben. Die anderen Formeln folgen formal. Damit sind die Voraussetzungen für eine Kategorie erfüllt. Die Tauschsphäre kann als Kategorie betrachtet werden.

Anmerkungen

1. Da die Morphismenklassen einelementig sind, gilt

$$\begin{aligned} t_{BA} \circ t_{AB} &= id_A && (4) \\ t_{AB} \circ t_{BA} &= id_B. \end{aligned}$$

   Damit ist t_{AB} ein Isomorphismus [3],[4] und somit sind alle Waren in der Tauschsphäre isomorph. Da die Klasse der Morphismen $Mor(A, B)$ einelementig ist, gibt es jeweils genau einen Isomorphismus. Dies wird bei Marx ausgedrückt durch: Als Gebrauchswerte sind die Waren verschieden, aber als Waren sind sie alle gleich, dh. gleichgestaltig.

2. Der Morphismus id_A beschreibt keinen Tausch, sondern das Objekt A. Man kann in einer Kategorie die Objekte ersetzen durch die Morphismen, die (2), (3) erfüllen. So wird in dem Lehrbuch [6] vorgegangen.

Im Folgenden wird, soweit möglich, die spezielle Struktur der Kategorie der Tauschsphäre nicht genutzt und möglichst allgemein vorgegangen.

2.2 Kategoriales Produkt

Ein Produkt von zwei Objekten A, B ist in der Kategorientheorie [3],[4] wie folgt definiert (vgl. Figur 1):

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "<f,g>"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
 & A \times B \arrow[dl, "p_A"] \arrow[dr, "p_B"'] & \\
A & & B
\end{tikzcd}
\quad .
$$

Figure 1

Ein Objekt, hier bezeichnet durch $A \times B$, und zwei Morphismen $p_A : A \times B \to A,\ p_B : A \times B \to B$ heissen Produkt von A und B wenn gilt:

Für alle Objekte X und alle Morphismen $f_A : X \to A,\ f_B : X \to B$ gibt es jeweils genau einen Morphismus von X nach $A \times B$, hier bezeichnet durch $< f_A, f_B >: X \to A \times B$, für den gilt

$$
\begin{aligned}
f_A &= p_A \circ < f_A, f_B > \\
f_B &= p_B \circ < f_A, f_B > \ .
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Das Produkt wird benannt durch $(A \times B,\ p_A, p_B)$ oder kürzer, unter Vernachlässigung der Nennung der Morphismen $p_A,\ p_B$, durch $A \times B$. Die Morphismen $p_A,\ p_B$ heissen Projektoren.

Anmerkungen:

1. Gibt es mehrere Produkte, so sind sie isomorph. Man kann demnach von dem Produkt sprechen.

2. Der Morphismus $< f_A, f_B >$ ersetzt die beiden Morphismen f_A, f_B durch einen einzigen und fasst sie somit zusammen.

3. Die obige Definition lässt sich analog auf mehrere Objekte erweitern : $((A_1 \times \cdots \times A_n),\ p_{A_1}, \ldots, p_{A_n})$, dementsprechend die Figur 1. In diesem Sinne wird Figur 1 angewendet werden.

4. Es gilt Assoziativität
$A_1 \times (A_2 \times \cdots \times A_n) \simeq (A_1 \times \cdots \times A_n) \simeq (A_1 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n$,
sowie Kommutativität bis auf Isomorphie.

5. Das Produkt hat universelle Eigenschaften.

2.3 Kategoriales Produkt und Wertformen

Das kategoriale Produkt wird auf die Marxsche Analyse der Äquivalentform bezogen. Der Einfachheit halber wird abkürzend die Figur 1 verwendet, stehend für ihre Verallgemeinerung auf alle Waren. Man erhält damit:

1. Die Ware X tauscht mit der Ware A und der Ware B, sie befindet sich somit in "*Totaler oder entfalteter Wertform*" [5, Seite 641].
Dies entspricht der Reihung (X, A), (X, B), (X, C), ... [5, Seite 641 Zeile 5].

2. Jede Ware X tauscht mit der Ware $A \times B$. Diese heisst "*Äquivalentware*" und befindet sich somit in "*Allgemeiner Wertform*" [5, Seite 643].
   Dies entspricht der Reihung (X_1, L), (X_2, L), (X_3, L).... [5, Seite 643 Zeile 10].

3. Ist eine bestimmte Ware zur Darstellung des Produktes $A \times B$ ausgewählt, so ist sie "*Geld* " und befindet sich in "*Geldform*" [5, Seite 647].

4. Die Formel $(A_1 \times \cdots \times A_n) \times B = (A_1 \times \cdots \times A_n \times B)$ beschreibt die Eingliederung einer neuen Ware in die Warenwelt, ebenso eine Ausgliederung.

Als Geld ist das hier Beschriebene in der Welt realisiert und nutzbar gemacht.

2.4 Äquivalentware als Limes

Die Definition eines Produktes $A \times B$ von Objekten A, B ist ein Beispiel eines allgemeinen Vorgehens zur Definition universeller Begriffe. In diesem werden Diagramme, Kegel und die zugehörige Kategorie betrachtet. Initiale und terminale Objekte der Kategorie führen zur Definition eines universalen Objektes. Das terminale Objekt ist hier eine andere Fassung des Limes, welcher sich in seiner Definition nur auf die Kegel bezieht.

In der Wertanalyse bedient sich Marx eines solchen Methode zur Gewinnung der Äquivalentware. Die dort betrachtete Reihung

$$(A \,\text{tauscht mit}\, B_1,\ A \,\text{tauscht mit}\, B_2,\ \ldots\ )$$

kann als Kegel mit der Spitze A über dem Diagramm $(B_1, B_2, \ldots)$ aufgefasst werden. Im vorliegenden Fall ist der Limes solcher Kegel gerade das kategorielle Produkt $B_1 \times B_2 \times \ldots$. Solche Kegel bilden aber auch die Objekte einer Kategorie. Morphismen dieser Objekte sind in der Marxschen Analyse nicht explizit angegeben, implizit dahingehend, dass sie als gleichwertig angesehen werden. Aus solchen Kegeln wird die Äquivalentware als zusammenfassendes Element gewonnen. Diese entspricht dem terminalen Objekt dieser Kategorie. Im Grunde können die Devisenmärkte als andauernder Prozess zur zeitlichen Realisierung dieses globalen terminalen Objektes angesehen werden. Hierrüber kommt ein dynamisches Element in den ansonsten statischen mathematischen Kalkül.

In dem vereinfachten Diagramm Figur 1 stellt sich dies wie folgt dar. Die Reihung

$$(X \to A, X \to B)$$

entspricht einem Kegel mit der Spitze X über dem Diagramm (A, B). Zu verschiedenem X gehört jeweils ein Kegel. Der Limes dieser Kegel, sofern er existiert, ist das kategorielle Produkt, dh. der Kegel $(A \times B \to A, A \times B \to B)$. Der Vollzug des Limes, die Setzung der Geldware, ist nach Marx *geschichtliche Tat*.

Morphismen der Kegel ergeben sich aus den Morphismen der Spitzen X und den Identitätsmorphismen von A und B. Das terminale Objekt dieser Kategorie, sofern es existiert, ist der Kegel $(A \times B \to A, A \times B \to B)$.

2.5 Mengenlehre

Für das weitere wird als Beispiel die kategoriale Darstellung der Mengenlehre genutzt. Die hier kurz dargestellt wird.
In der naiven Mengenlehre ist eine Menge eine Zusammenfassung von Elementen. Eine Abbildung ordnet einem Element der Urbildmenge ein Element der Bildmenge zu. "Element" ist ein Grundbegriff der naiven Mengenlehre.
Wird die Mengenlehre als Kategorie gefasst, der Kategorie der Mengen, so ist "Element" kein Grundbgriff mehr, sondern ein abgeleiteter Begriff. Die Kategorie der Mengen besteht aus Objekten und Morphismen, sowie bestimmten axiomatischen Eigenschaften derselben. Diese kennzeichnen die Kategorie als die Kategorie der Mengen [7, Seite 65ff], [8] . Die Kategorie der Mengen besitzt per Axiom ein terminales Objekt. Ein terminales Objekt ist ein Objekt, zu dem es von jedem Objekt genau einen Morphismus gibt.
Damit wird der Begriff des Elementes einer Menge definiert. Ein Element a eines Objektes A der Kategorie der Mengen ist definiert als ein Morphismus a von dem terminalen Objekt T zu dem Objekt A , d.h. $a : T \to A$. Man definiert in Folge das "Enthaltensein" durch

$$a \in A := (a : T \to A)\,.$$

Dies ist ein Beispiel für ein allgemeines Vorgehen in der Kategorientheorie um einem Objekt Unterobjekte zuzuschreiben [9, Seite 125]. Die Unterobjekte sind Morphismen. Zur Geschichte und Notwendigkeit dieses Vorgehens siehe [10, Seite 170, letzter Abschnitt].

2.6 Wert

Die allgemeine Äquivalentware G stellt das Produkt aller Waren dar, dh. $G = (A_1 \times \cdots \times A_n)$. Damit gibt es von jeder Ware X genau einen Morphismus zur Äquivalentware, der die Bedingungen des Produktes erfüllt. Es gibt keine weiteren Morphismen, da die Klasse der Morphismen $Mor_{\mathfrak{T}}(X, G)$ jeweils einelementig ist. Damit ist die Äquivalentware auch ein terminales Objekt. Damit definiert der Morphismus $p_A : A_1 \times \ldots A \cdots \times A_n \to A$, der Eintausch der Äquivalentware gegen die Ware A, im zuvorgenannten Sinne ein Unterobjekt der Ware A, ihren "*Wert*".
Allgemeiner: Die Äquivalentware ist die Spitze eines Limeskegels und damit universeller Natur. Damit ist sie geeignet für die Definition eines universellen Unterobjektes. Insbesondere gilt: Der Morphismus von einer Kegelspitze X zur Spitze G des Limeskegels ist qua Definition des Limeskegels eindeutig gegeben und unabhängig von der Mächtigkeit der Morphismenmege $Mor_{\mathfrak{T}}(X, G)$.

Dies findet sich in der Wertformanalyse wieder, wie das Zitat [11, Seite 53 Anmerkung 12] zeigt: "MEW 23 Seite 87 *Erst innerhalb ihres Austausches* erhalten die Arbeitsprodukte eine von ihnen sinnlich verschiedene Gebrauchsgegenständlichkeit getrennte gesellschaftlich Wertgegenständlichkeit." Die Hervorhebung ist von dem zitierenden M. Heinrich.
Weiter begründet und besprochen wird dies in [12], insbesondere durch die Marxzitate in dem Anhang 4, sowie in [13, Seite 92ff].

Um diesen Bezug kenntlicher zu machen wird hier auch die Bezeichnung w_A für p_A, dh. $w_A := p_A$, verwendet. Dieser Morphismus wird hier Wertmorphismus der Ware A genannt.

2.7 Die einfachen Wertformen

Projeziert man den oben dargestellten allgemeinen Fall auf den "Tausch der Ware A mit der Ware B", so gilt die Ware B als Äquivalentware und der notwendigerweise gleichzeitig stattfindente "Tausch der Ware B mit der Ware A" definiert den Wert im zuvor genannten Sinne.

Auf der Gegenstandsebene werden real die Waren A, B getauscht

$$A \underset{t_{BA}}{\overset{t_{AB}}{\rightleftarrows}} B \, .$$

Dieser reale Tausch stellt in der Projektion den Tausch der Ware A gegen die Ware B wie folgt aufgeklappt dar:

$$A \xrightarrow{t_{AB} \prec <t_{AB}>} (B \prec G) \xrightarrow{t_{BA} \prec p_A \prec w_A} A \, .$$

Hier bezeichnet $x \prec y$, dass y durch x dargestellt wird, und G die Geldware oder Äquivalentware . $< t_{AB} >$ bezieht sich auf eine reduzierte Figur 1, dh. der rechte Teil der Figur ist weggeschnitten.
Eingeklappt stellt es sich wie folgt dar:

$$A \underset{t_{BA} \prec p_A \prec w_A}{\overset{t_{AB} \prec <t_{AB}>}{\rightleftarrows}} (B \prec G) \, . \tag{6}$$

Für den Tausch der Ware B gegen die Ware A gilt das Analoge.

Dieser Sachverhalt ist bei Marx enthalten in den "*einfachen Wertformen*". Hier ist die "*einfache relative Wertform*" modelliert durch $< t_{AB} >$ und die "*einfache Äquivalentform*" modelliert durch das reduzierte Produkt (G, p_A). Das Analoge gilt für den Eintausch der Ware B gegen die Ware A.

Der materielle Akt des Tausches stellt demnach gleichzeitig zwei unterschiedliche Funktionen dar

$$\begin{aligned} &t_{AB} \prec < t_{AB} >, \quad t_{AB} \prec p_B \prec w_B \\ &t_{BA} \prec < t_{BA} >, \quad t_{BA} \prec p_A \prec w_A \end{aligned}$$

Die einfachen Wertformen sind Ausgangspunkt der Analyse von Marx.

2.8 Tauschverhältnis, Tauschwert

Dem Objekt A kann zur Beschreibung der Produktmenge ein 1-dimensionaler Vektorraum $\mathbb{V}_A$ zugeordnet werden. Damit kann dem Morphismus t_{AB} ein

Operator $\hat{t}_{AB} : \mathbb{V}_A \to \mathbb{V}_B$ zugeordnet werden. Er beschreibt die Produktmenge B, die mit der Produktmenge A eingetauscht wird.

$$
\begin{aligned}
t_{AB} &: A \to B \\
\hat{t}_{AB} &: \mathbb{V}_A \to \mathbb{V}_B
\end{aligned}
$$

Im einfachsten Fall ist der Operator linear. Nach der Wahl einer Basis in den Vektorräumen $\mathbb{V}_A, \mathbb{V}_B$ kann der lineare Operator durch sein Matrixelement $\tilde{t}_{AB}$ bezüglich diesen Basen beschrieben werden. Für solche Matrixelemente gilt

$$
\begin{aligned}
\tilde{t}_{AB} \cdot \tilde{t}_{BA} &= 1 \qquad (7) \\
\tilde{t}_{AB} \cdot \tilde{t}_{BC} &= \tilde{t}_{AC} \, .
\end{aligned}
$$

Das Matrixelement ist bei Marx durch das *Tauschverhältnis* erfasst.

Die Ware A, der auf den Markt gebrachte Gebrauchsgegenstand, wird durch die "konkrete Arbeit" Z_A hergestellt. Dies lässt sich durch einen Morphismus $k_{AA} : Z_A \to A$ mit der Quelle Z_A und dem Ziel A darstellen. Entsprechend [9, Seite 125] kann man dies auch ansehen als : Der Morphismus k_{AA} definiert ein Unterobjekt von A der Form Z_A .
Man könnte versuchen dieses Unterobjekt mit soetwas wie , was Marx als "Gallerte von Arbeit" bezeichnet, zu identifizieren. Beachtet man [9, Seite 127] " Wir können uns mit Hilfe des verallgemeinerten Elementbegriffes also abstrakte Morphismen als *konkrete Abbildungen* vorstellen !", so wäre mit dieser Sichtweise eine Art Substanzvorstellung von Arbeit gegeben. Dies wird hier nicht vertreten.

Zur Erfassung der Mengen lassen sich Quelle und Ziel 1-dimensionale Vektorräume $\mathbb{T}_A$ und $\mathbb{V}_A$ zuordnen. Der Vektorraum $\mathbb{T}_A$ dient der Beschreibung der Arbeitsmenge gemessen in newtonscher Zeit, die Arbeitszeitachse des Produzenten A der Ware A. Der Vektorraum $\mathbb{V}_A$ dient wie zuvor der Beschreibung der Produktmenge. Damit kann dem Morphismus k_{AA} ein Operator $\hat{k}_{AA} : \mathbb{T}_A \to \mathbb{V}_A$ zugeordnet werden. Im einfachsten Fall ist er linear. Er beschreibt die konkrete Arbeitskraft oder allgemeiner die konkrete Produktivität, die in diesem speziellen Herstellungsprozess angewendet wird.

$$
\begin{aligned}
k_{AA} &: Z_A \to A \\
\hat{k}_{AA} &: \mathbb{T}_A \to \mathbb{V}_A
\end{aligned}
$$

Nach der Wahl einer Basis in den Vektorräumen $\mathbb{T}_A, \mathbb{V}_A$ kann der lineare Operator durch sein Matrixelement $\tilde{k}_{AA}$ bezüglich diesen Basen beschrieben werden. Das Matrixelement beschreibt numerisch die konkrete Arbeitskraft oder allgemeiner die konkrete Produktivkraft zur Herstellung des Gebrauchswertes A des Produzenten A.
Analoges gilt für den Produzenten der Ware B.

Tauscht A seine Ware mit der Ware von B, so ist es so, als ob er diese hergestellt habe. (vgl. Figur 2).

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "t_{AB}"] & B \\
Z_A \arrow[u, "k_{AA}"] \arrow[ur, "k_{AB}"] & Z_B \arrow[u, "k_{BB}"']
\end{tikzcd}
$$

Figure 2

Der zugehörige Morphismus k_{AB} und die zugehörige Produktivität sind gegeben durch

$$
\begin{aligned}
k_{AB} &= t_{AB} \circ k_{AA} \\
\tilde{k}_{AB} &= \tilde{t}_{AB} \cdot \tilde{k}_{AA} \,.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

A geht davon aus, dass er die Ware B mit derselben Produktivität wie B produzieren kann. Dies bedeutet: Er bezieht sich auf dieselbe Arbeitszeit. Er wird demnach den Tausch nur vollziehen, wenn gilt:

$$
\tilde{k}_{AB} \geq \tilde{k}_{BB} \,. \tag{9}
$$

Die beiden Grössen sind vergleichbar, da sie von gleicher Dimension sind, nämlich: (Produkteinheit von B) durch Zeiteinheit.

Analoges gilt für den Produzenten der Ware B.

Nur wenn der Warenbesitzer der Ware B die Ware A eintauschen will, bekommt die Ware A einen Wert, ansonsten ist sie wertlos, denn sie tritt nicht in den gesellschaftlichen Verwertungsprozess ein. Vor dem Tausch hat die Ware A prospektiv Wert. In dem Vollzug des Tausches besitzt sie Wert. Nach dem Tausch verlässt sie die Tauschsphäre und hatte Wert.

Aus (7),(8),(9) und den analogen Gleichungen für den Warenbesitzer B errechnet sich

$$
\tilde{t}_{BA} = \frac{\tilde{k}_{AA}}{\tilde{k}_{BB}} \,.
$$

Nach (6) stellt der Morphismus t_{BA} das Unterobjekt w_A dar. Damit ist das Matrixelement des Unterobjektes w_A gegeben durch

$$
\tilde{w}_A = \frac{\tilde{k}_{AA}}{\tilde{k}_{BB}} \,.
$$

Dieses Verhältnis heisst *Tauschwert* der Ware A und misst die Produktivität des Warenherstellers A durch die Produktivität des Warenherstellers B, die letztere gilt hier als Einheit.

Wird der Tauschwert erweitert durch die angewendete Arbeitszeit T,

$$
\tilde{w}_A = \frac{\tilde{k}_{AA}}{\tilde{k}_{BB}} = \frac{\tilde{k}_{AA}}{\tilde{k}_{BB}} \cdot \frac{T}{T} = \frac{(\tilde{k}_{AA} \cdot T)}{(\tilde{k}_{BB} \cdot T)} = \tilde{t}_{BA},
$$

so ergibt sich aus dem Produktivitätsverhältnis ein Mengenverhältnis und dieses ist das Tauschverhältnis der getauschten Waren. Das Tauschverhältnis stellt damit den Tauschwert real dar oder wie Marx es ausdrückt: Das Tauschverhältnis ist die Erscheinungsform des Tauschwertes.

Bei dem Tausch mit der Äquivalentware G wird die konkrete Produktivkraft des Produzenten A durch die allgemeine Produktivkraft zur Ware G gemessen

$$\tilde{w}_A = \frac{\tilde{k}_{AA}}{\tilde{k}_{GG}} \,. \tag{10}$$

Dies bestimmt den Zahlenwert des Tauschwertes eindeutig. Damit ist das Matrixelement $\tilde{w}_A$ des Wertmorphismus w_A bestimmt.

Wird der Tauschwert erweitert durch die angewendete Arbeitszeit T,

$$\tilde{w}_A = \frac{\tilde{k}_{AA}}{\tilde{k}_{GG}} = \frac{\tilde{k}_{AA}}{\tilde{k}_{GG}} \cdot \frac{T}{T} = \frac{(\tilde{k}_{AA} \cdot T)}{(\tilde{k}_{GG} \cdot T)} = \frac{1}{\text{"Preis von A"}} ,$$

so ergibt sich aus dem Produktivitätsverhältnis ein Mengenverhältnis und dieses ist der Preis zu dem die Ware A gekauft wird. Das Preisrealisierung stellt damit den Tauschwert real dar oder wie Marx es ausdrückt: Der Preis ist die Erscheinungsform des Tauschwertes.
Es ist anzumerken: Es gibt den Verkaufspreis (Sicht des Verkäufers) und den Einkaufspreis (Sicht des Käufers). Symmetriegemäss und sinngemäss müsste der Einkaufspreis definiert sein durch (Produktmenge/Geldmenge). Dies ist nicht üblich und man spricht von dem Preis und bezieht sich auf den Verkaufspreis. Dieser kennzeichnet wieviel Geld der Verkäufer für seine Produktmenge bekommen möchte.

Es ist anzumerken: Bei der Ableitung der Äquivalentware wurde die Ableitung der allgemeinen Produktivkraft nicht berücksichtigt. Dies bleibe hier offen.

2.9 Der einfache Tausch

Im "Kapital" beginnt Marx seine Analyse mit dem einfachen Warentausch

$$A = B \,.$$

In der Gestalt

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "t_{AB}"] & B \arrow[l, shift left, "t_{BA}"] \end{tikzcd}$$

stellt dies eine Kategorie dar mit den Objekten $Ob(\mathfrak{T}) = \{A, B\}$ und den Morphismen $Mor(\mathfrak{T}) = \{id_A, id_B, t_AB, t_BA\}$. A, B sind Endobjekte.

Wenn man die Figur 3 aufgeklappt darstellt

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "t_{AB}"] \arrow[rr, bend right, "id_A"'] & B \arrow[r, "t_{BA}"] & A \,. \end{tikzcd}$$

und, rechtsrum in vertikale Lage verdreht, mit der Figur 2 vergleicht, so stellt man fest: B stellt A mit der Projektion $p_A := t_{BA}$ als kategoriales Produkt dar. B befindet sich in Äquivalentform. Dies ist die einzige Möglichkeit, da hier nur Morphismen, die einen Tausch beschreiben zulässig sind.

Dies kann man auch als erstes Glied in einer Kette

$$A,\ A \times B,\ A \times B \times C,\ \ldots \tag{11}$$

von kategoriealen Produkten sehen.

B als Endobjekt und als kategoriales Produkt von A macht als Quelle des Morphismus t_{AB} diesen zur Darstellung des Wertmorphismus $w_A := t_{AB}$ und versieht die Ware A mit einem Unterobjekt, dem Wert. Das Matrixelementes dieses Morphismuses wurde oben bestimmt.

Weiter oben wurde die Struktur des einfachen Tausches durch Projektion der allgemeinen Struktur auf den einfachen Tausch gewonnen. Hier wurde diese Struktur direkt aus dem einfachen Tausch selbst gewonnen.

Der Austausch ist ein rein gesellschaftlicher Akt und damit ist auch dieses Unterobjekt rein gesellschaftlich bedingt. Dieses Unterobjektes ist eine Basis des Fetischcharakters des Kapitales.

3 Zusammenfassung

Indem die Tauschsphäre als Kategorie im Sinne der mathematischen Kategorientheorie gefasst wird, können Methoden dieser Theorie zur Analyse der Marxschen Wertformanalyse genutzt werden. Man stellt fest, dass die Äquivalentware bei Marx die Struktur eines kategoriellen Produktes enthält. Der, gemäss der Kategorientheorie notwendigen, Darstellung des Produktes in der Kategorie entspricht die reale Darstellung der Äquivalentware durch Geld. Die Methode mit der Marx die Äquivalentware gewinnt, entspricht der allgemeinen Methode in der einer Kategorie von Kegeln ein Limeskegel zugeordnet ist. In dem vorliegenden Fall führt dies auf das kategorielle Produkt, bzw. auf die Äquivalentware und in deren Darstellung auf Geld und seine Wertformen. Die Existenz des Limeskegels ist nach Marx in der Gestalt von Geld als geschichtliche Tat in die Realität gesetzt. Dazu wird in der Realität die Tauschsphäre entsprechend den Wertformen des Geldes umgestaltet. Aus dem direkten Tausch wird ein durch das Geld vermittelter Tausch.

In der Kategorientheorie ist ein Unterobjekt eines Objektes gegeben durch einen Morphismus von einem ausgezeichneten Objekt in das Objekt. Dementsprechend ist in der kategorialen Fassung der Mengenlehre der Begriff des Elementes einer Menge kein elementarer, sondern ein abgeleiteter Begriff. Ein Element einer Menge ist hier gegeben durch einen Morphismus von dem terminalen Objekt in die Menge. Dabei ist die Existenz des terminalen Objektes in diesem Falle durch axiomatische Setzung gegeben. In Analogie wird das Unterobjekt Wert einer Ware hier gegeben durch einen Morphismus von dem Objekt Äquivalentware in die Ware. Dies ist real dargestellt durch den Tausch von Geld gegen Ware.

Indem das bis jetzt gewonnene auf eine Tauschsphäre, die aus zwei Waren besteht, herunterprojeziert wird, wird der Zusammenhang mit den einfachen Wertformen hergestellt.

Entsprechend der Quantität der Waren können den zuvorgenannten Strukturen quantitative Strukturen zugeordnet werden. Für einen Morphismen ist dies hier ein linearer Operator. Sein einziges Matrixelement beschreibt das Tauschverhältnis. Für den, zu einem Unterobjekt Wert gehörenden Morphismus, beschreibt das Matrixelement den Tauschwert.

Eine Ware wird durch konkrete Arbeit hergestellt. Die Analyse des Tausches bestimmt den Tauschwert. Dieser ist damit gegeben durch Invarianten des Arbeitsprozesses, dem Quotienten von der konkreten Arbeitsproduktivität bezüglich der Ware und der Arbeitsproduktivät bezüglich der Äquivalentware. Wird dieser Quotient mit der Arbeitszeit erweitert, so erhält man das Tauschverhältnis. Als Tauschverhältnis erscheint der Tauschwert.

Es sei noch angemerkt: Bereits früher wurde die Kategorientheorie auf eine Analyse von K. Marx angewendet. Die Untersuchung von K. Marx zur Differentialrechnung wurde so in ihrer Methodik in [14] betrachtet.

4 Literaturverzeichnis

References

[1] Karl Marx und Friedrich Engels. *Werke Band 23.* Berlin 1962

[2] Eilenberg, Samuel; MacLane, Saunders. *General Theory of natural Aequivalences* Trans.Amer.Math.Soc., **58**:231-294,1945

[3] Preuss, Gerhard. *Grundbegriffe der Kategorientheorie* Mannheim 1975

[4] Roman, Steven. *An Introduction to the Language of Category Theory* Cham 2017

[5] Marx, Karl; Engels, Friedrich. *Gesamtausgabe MEGA II/5,1* Berlin 1983

[6] Pumplün, D. *Elemente der Kategorientheorie* Berlin 1999

[7] Leinster, Tom. *Basic Category Theory* Cambridge 2014

[8] Lawvere, F. William; Rosebrugh, Robert. *Sets for Mathematics* Cambridge 2003

[9] Brandenburger, Martin. *Einführung in die Kategorientheorie* Wiesbaden 2017

[10] Kroemer, Ralf. *Tool and Object* Basel 2007

[11] Heinrich, Michael. *Kritik der politischen Ökonomie* Stuttgart 2005

[12] Heinrich, Michael. *Wie das Marxsche <<Kapital>> lesen ?* Stuttgart 2009

[13] Heinrich, Michael. *Reconstruction or deconstruction? Methodological controversies about value and capital, and new insights from the critical edition* Bellofiore and Fineschi (eds.), 2009.

[14] Lawvere, F. William. *Unity and Identity of Opposites in Calculus and Physics* Appl. Categorical Structures, **4**:167-174,1996