



Munich Personal RePEc Archive

Forward Regression with Discrete and Continuous Wavelets Time-Frequency Window -An application to the Market Line-

MESTRE, Roman and Terraza, Michel

MRE, University of Montpellier

September 2018

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/89682/>

MPRA Paper No. 89682, posted 24 Oct 2018 14:31 UTC

Regression Forward avec fenêtres Tempo-Frequentielles roulantes par ondelettes discrettes et continues

-Une application à la Droite de Marché -

Roman MESTRE*

Michel TERRAZA^

Abstract :

Les régressions roulantes sont couramment utilisées pour étudier la stabilité des coefficients au cours du temps. En finance, elles permettent une estimation rapide de l'évolution temporelle du risque systématique en relâchant l'hypothèse de constance du paramètre Beta. Ce type d'approche temporelle peut s'associer avec une décomposition par ondelettes des variables permettant l'étude de la stabilité des coefficients d'une régression fréquentielle. De par les nombreuses propriétés de décomposition, on considère dans cet article qu'il peut être nécessaire de réitérer à chaque pas de la régression roulante un calcul des ondelettes si on souhaite parvenir à un degré plus précis de variation des coefficients. Nous faisons appel aux séries des cours boursiers d'AXA et du CAC40 sur une période journalière de 10 ans (2005-2015), et nous montrons, dans un premier temps, que cette précision affecte principalement les basses fréquences de la décomposition. Nous comparons, dans un deuxième temps, les résultats des fenêtres roulantes avec des ondelettes discrètes avec ceux obtenus avec des ondelettes continues.

Mots-Clés : Régressions roulantes temps fréquence, ondelettes, betas fréquentiels instables,

JEL codes : G00, G11, G12

L'analyse fréquentielle des séries temporelles en économie s'est développée à partir des travaux de Fourier et de l'analyse harmonique. L'analyse spectrale possède, cependant, plusieurs limites liées à des problèmes techniques (comme le choix des fenêtres par exemple), mais son atemporalité reste une des raisons de son utilisation relativement limitée et ce malgré les travaux de Priestley sur le spectre évolutif.

Dans ce sens, l'analyse temps-fréquence élaborée en 1909 par Haar et poursuivie par Gabor en 1946 constitue une avancée méthodologique décisive. Vulgarisée sous le nom d'ondelettes, elle permet d'isoler les différentes fréquences d'une chronique tout en étudiant leurs évolutions au cours du temps. L'utilisation de cette technique nécessite un nombre d'observation conséquent que l'on rencontre dans le domaine de la finance et en particulier dans les bases de données des cours boursiers. Elle est devenue de ce fait l'instrument privilégié pour prendre en compte l'hypothèse d'hétérogénéité comportementale des agents lors de la constitution de leur portefeuille, ce qui a permis la construction d'une VaR particulière liée à l'hétérogénéité des agents, nommée Wavelets Value-at-Risk. Cette approche univariée des ondelettes a connue des prolongements dans des études multivariées. Il en est ainsi du MEDAF de Sharpe pour lequel elle permet d'estimer le Beta de la droite de marché selon le comportement des agents qui se caractérise par des horizons d'investissement hétérogènes (Cf. Gençay et al 2003).

De nombreuses études portent sur une des limites du MEDAF à savoir l'instabilité de son paramètre central : le Beta. on peut citer les travaux de Black, Jensen et Scholes [1972], Fama et McBeth [1973]. Les fenêtres roulantes sont ainsi apparues comme un des outils permettant d'outrepasser ce problème comme le montre Faff et al [1992-1998], Brooks et al [1992-1998] mais surtout Groenewold et Fraser [1997] et Yeo [2001] qui comparent l'utilisation des processus GARCH, des fenêtres roulantes et du filtre de Kalman-Bucy pour estimer le Beta au cours du temps. L'utilisation des Fenêtres Roulantes Forward associée aux ondelettes constitue alors le prolongement théorique de ces travaux dans le cadre du MEDAF.

Mestre et Terraza (2017) ont montré que sur une période assez longue, la valeur du beta d'une action quelconque, présente une volatilité globale assez importante qui se différencie selon sa décomposition fréquentielle. Pour mettre en évidence ce résultat, on utilise de manière traditionnelle les régressions roulantes forwards à fenêtre constante qui sont combinées à la technique des ondelettes. Cela revient à considérer que la décomposition en ondelettes est unique sur la période globale de l'étude ce qui, conceptuellement, est

contestable. En effet, le nombre d'observation joue un rôle important pour déterminer l'ordre de la décomposition opéré par différents filtrages et échantillonnage. Ainsi l'utilisation traditionnelle de la fenêtre roulante avec les ondelettes conduit à des résultats erronés. La décomposition discrète en ondelettes, cependant, constitue une simplification pratique de celle continue car les fréquences sont rassemblées en bandes de fréquences avec une échelle dyadique. Les bandes de Basses-Fréquences couvrent ainsi des horizons temporels étendus limitant son utilisation par les praticiens.

Dans cet article nous voulons montrer qu'il peut exister un gain de précision pour l'utilisateur s'il fait appel à une fenêtre tempo-fréquentielle, qui effectue une décomposition fréquentielle discrète en ondelettes à chaque étape de l'estimation de la droite de marché. De la même manière, nous montrons qu'une version en fréquence continue représente aussi une alternative pour estimer le Beta dans une espace tempo-fréquentielle plus précis et étendu.

Pour vérifier cette hypothèse nous recourons aux cours boursiers d'AXA et de l'indice CAC40 sur la période journalière 2005-2015 afin de construire sa droite de marché et d'estimer le Beta avec diverses fenêtres temporelles et fréquentielles.

Aspects théoriques des ondelettes appliquées au MEDAF

Nous basons notre article sur les variables entrant dans l'estimation de la droite de marché découlant du Modèle d'Evaluation Des Actifs Financiers (MEDAF) de Sharpe (1962) :

$$y_t = \alpha + \beta \cdot x_t + \varepsilon_t \quad (1)$$

Avec y_t et x_t des processus aléatoires stationnaires représentant respectivement les rendements de l'actif et du marché et ε_t un processus *i.i.d.* $(0, \sigma_\varepsilon)$. Les paramètres, estimés par les MCO ou le Maximum de Vraisemblance, sont par hypothèse des estimateurs BLUE qui peuvent, dans ce cas, être utilisés pour réaliser différentes études empiriques. Nous retenons, dans cet article, les cours boursiers d'AXA et de l'indice CAC40 pour la période journalière 2005-2015.

Ce modèle suppose que le risque estimé est constant et identique quel que soit l'horizon de placement des investisseurs. Il ne prend pas en considération la variabilité temporelle du risque systématique mais aussi l'hypothèse comportementale d'hétérogénéité des agents. En recourant aux régressions roulantes nous pouvons évaluer le risque au cours du temps et les ondelettes permettent de l'estimer sur plusieurs échelles fréquentielles.

La technique des ondelettes est un outil mathématique permettant de réduire l'arbitrage temps-fréquence. En effet, la Transformée de Fourier impose de choisir son degré de localisation temporelle ou fréquentielle. En revanche, les décompositions en ondelettes se basent sur une fonction particulière notée $\psi_{j,k}(t)$ (l'ondelette-mère) qui est de moyenne nulle et qui préserve l'énergie/variance de la série de départ.

$$\psi_{\tau,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)$$

Cette fonction de base est traduite par τ et dilatée par s pour obtenir des coefficients d'ondelettes :

$$W(s, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_t \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt = \langle x_t, \psi_{\tau,s} \rangle$$

Avec $\psi^*\left(\frac{t-\tau}{s}\right)$ la complexe conjugué de $\psi_{\tau,s}(t)$.

Il s'agit ici d'une décomposition continue en ondelettes (ou CWT) mais il existe une version discrète (DWT) plus simple qui se base sur une échelle dyadique (N doit être un multiple de deux). Dans cet article, cependant, nous utilisons une transformation discrète particulière appelée Maximal Overlap Discrete Wavelet Transform (MODWT) qui possède des propriétés supplémentaires, comme une meilleure analyse de la variance (la variance d'ondelette estimée est plus précise) et qui relâche la contrainte dyadique. La décomposition s'opère par un filtrage successif de la série et des coefficients d'ondelettes et par une remise à l'échelle des outputs du filtre. Ce procédé est connu sous le nom d'Algorithme en Cascade de Mallat (1989-2009). A l'issue de la décomposition nous obtenons une segmentation fréquentielle de la série d'origine en plusieurs bandes de fréquences D_j pour $j=1, \dots, J$ reliées à un horizon temporel (voir Table A1 en annexes). Le nombre maximal de bandes de fréquence J nécessaire pour la décomposition se calcule selon la formule : $J = \frac{\text{Ln}(N)}{\text{Ln}(2)}$.

La décomposition additive en ondelettes discrètes permet de reconstruire la série de départ comme suit :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{S}_J + \sum_{j=1}^{j=J} \mathbf{D}_j$$

La série est alors la somme d'une approximation de sa tendance S_j et de bandes de fréquences de résolution différentes (c'est-à-dire pour divers horizons temporels). La décomposition discrète fournit alors des sous-chroniques sur lesquelles il est possible d'estimer le Beta et d'appliquer une fenêtre roulante. Nous utilisons ainsi les régressions roulantes Forward à fenêtre fixe, de longueur 260 jours correspondant pour des observations journalières financières à 1 année de trading. Nous définissons ainsi les Betas suivant :

- β_r correspond aux Betas Roulants estimés sans recourir à la décomposition fréquentielle.
- β_F représente les Betas Roulants fréquentiels estimés dans une fenêtre qui glisse le long des bandes de fréquence issues des décompositions en ondelettes des séries.
- β_{TF} sont les Betas Roulants tempo-fréquentiels estimés avec des décompositions en ondelettes à chaque glissements de la fenetre. Les ondelettes devant respecter les propriétés de conservation de l'énergie et la nullité de la moyenne, nous vérifions qu'il y a concordance entre la taille de la régression et le nombre de points utilisés pour la décomposition. Dans la procédure précédente il peut arriver que ces propriétés ne soient pas respectées ce qui peut introduire des biais dans les estimateurs des paramètres du modèle.

L'utilisation des ondelettes discrètes et des fenêtres roulantes présente, cependant, deux contraintes : la perte d'observations liée à la taille de la fenêtre (260 dans notre cas) et la perte d'information fréquentielle liée la discrétisation des bandes de fréquences. Les ondelettes rassemblent les fréquences en bandes ce qui revient à agréger les comportements au sein de celle-ci. Les décompositions continues en ondelettes, à l'opposé, permettent de couvrir un spectre plus large de fréquence et de les traitées séparément.

La régression entre bandes de fréquences est possible dans le sens où elles sont traitées comme des séries chronologiques à part entière. Dans le cas continu, en revanche, les différents filtres utilisés complexifient le processus de régression mais des outils, comme la cohérence et la phase en ondelettes, permettent de mesurer la corrélation au carrée (coefficient de détermination), le signe de la corrélation et son sens. Ces notions se basent sur une transposition des méthodes spectrales aux ondelettes, ainsi le spectre croisé en ondelettes

définit la covariance spectrale entre deux séries et les autos-spectres de puissance sont équivalents aux variances des chroniques. Il est relativement aisé de définir la cohérence comme le rapport du spectre croisé et des autos-spectres. La phase se définissant alors comme l'arc-tangente du quotient de la partie réelle et imaginaire du co-spectre. Pour plus de détails sur cette procédure, nous vous renvoyons vers les articles de Auth (2013), Bekiros et al (2016) et Mestre et Terraza (2017).

Nous développons, à partir de ces notions, un estimateur tempo-fréquentiel du Beta noté $\beta_{\tau,s}$.

$$\beta_{\tau,s} = \theta_{\tau,s} * \sqrt{WQ_{\tau,s}} * \frac{G(s^{-1}|SW_x|^2)^{1/2}}{G(s^{-1}|SW_y|^2)^{1/2}}$$

Avec $WQ_{\tau,s}$ la cohérence d'ondelette, SW_i avec $i = x, y$ le spectre de puissance de la série i et $\theta_{\tau,s}$ un paramètre de phase indiquant le signe de la corrélation. G est un opérateur de filtrage tempo-fréquentielle nécessaire pour obtenir des valeurs réelles.

Estimations tempo-fréquentielles du Beta :

Nous appliquons dans cette partie, les procédures d'estimation basées sur les ondelettes discrètes et continues, puis nous confrontons leurs résultats.

- Estimations statistiques du Beta par les MCO

Nous vérifions, préalablement, la stationnarité des rendements (Annexe A2) puis nous estimons, par les MCO, le Beta. Nous l'estimons aussi pour chaque bande de fréquence issue d'une décomposition discrète en ondelettes. Les résultats sont présentés dans la Table 1. Les estimations des paramètres confirment la nullité des constantes et la significativité des Betas et des R^2 . Les résidus ne sont pas, cependant, des échantillons d'un processus bruit-blanc d'après les différents tests. La nature des résidus conduit, ainsi, à dégrader la propriété de variance minimale du Beta et amène son instabilité.

Table 1 : Estimation du Beta

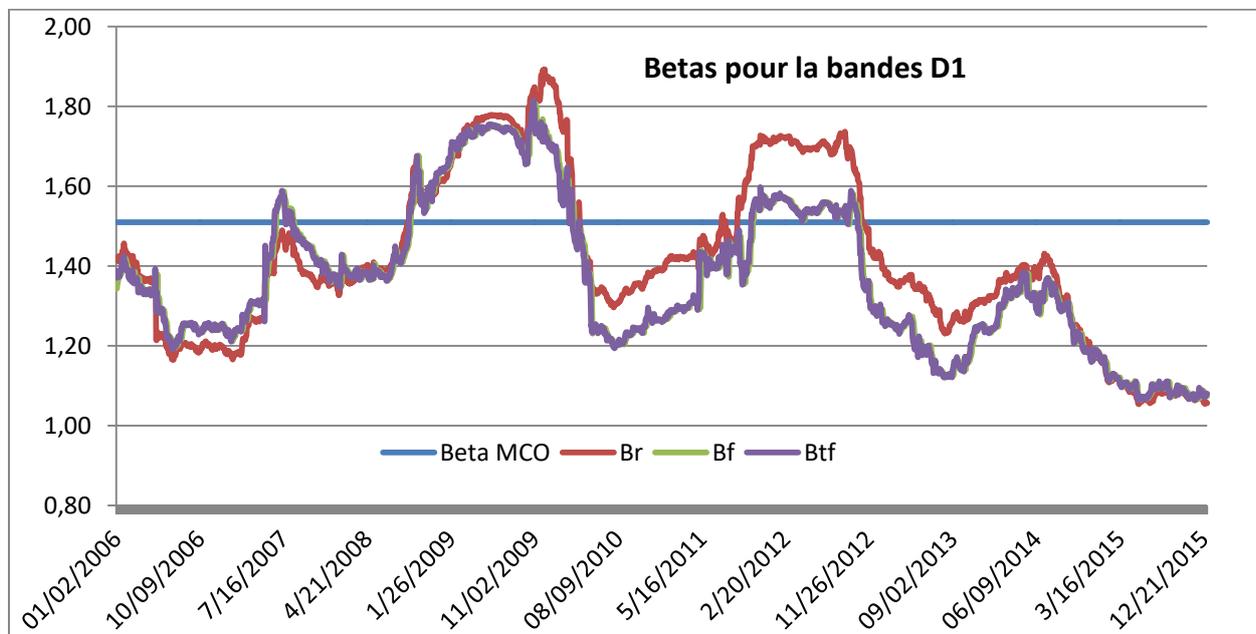
Axa	D1	D2	D3	D4	D5	D6	Période Globale
BETA	1,45	1,56	1,54	1,61	1,52	1,77	1.506
T-stats	78,36	80,39	75,80	79,97	60,00	85,10	77.98
Constante	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0.000425
T-stats	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1.54
R ²	0,68	0,69	0,67	0,69	0,56	0,72	0.68
LB	1050,00	2043,00	4678,90	5801,00	10905,00	13225,00	21.068
ARCH	621,00	792,00	1547,00	2664,00	2850,00	2864,00	62.132
JB	11765,00	10145,00	3695,00	1192,00	6617,00	2374,00	41993.2

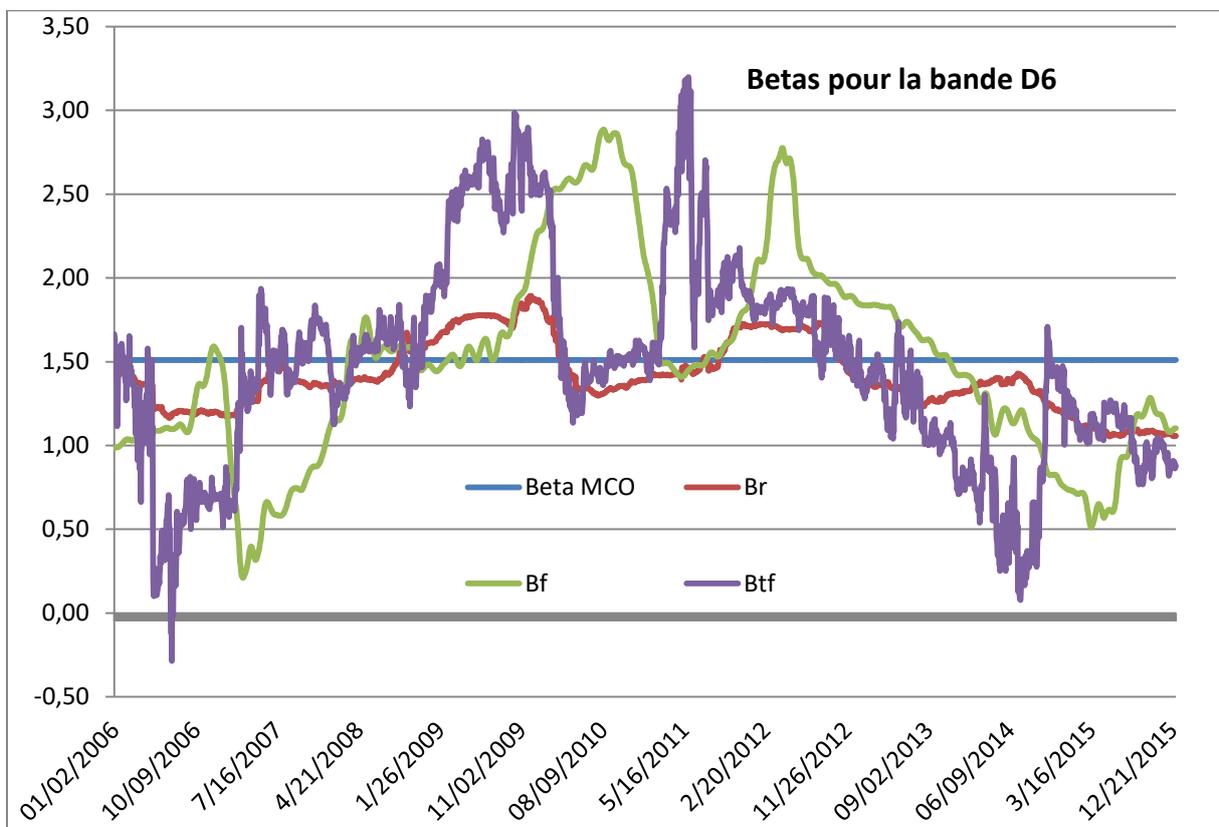
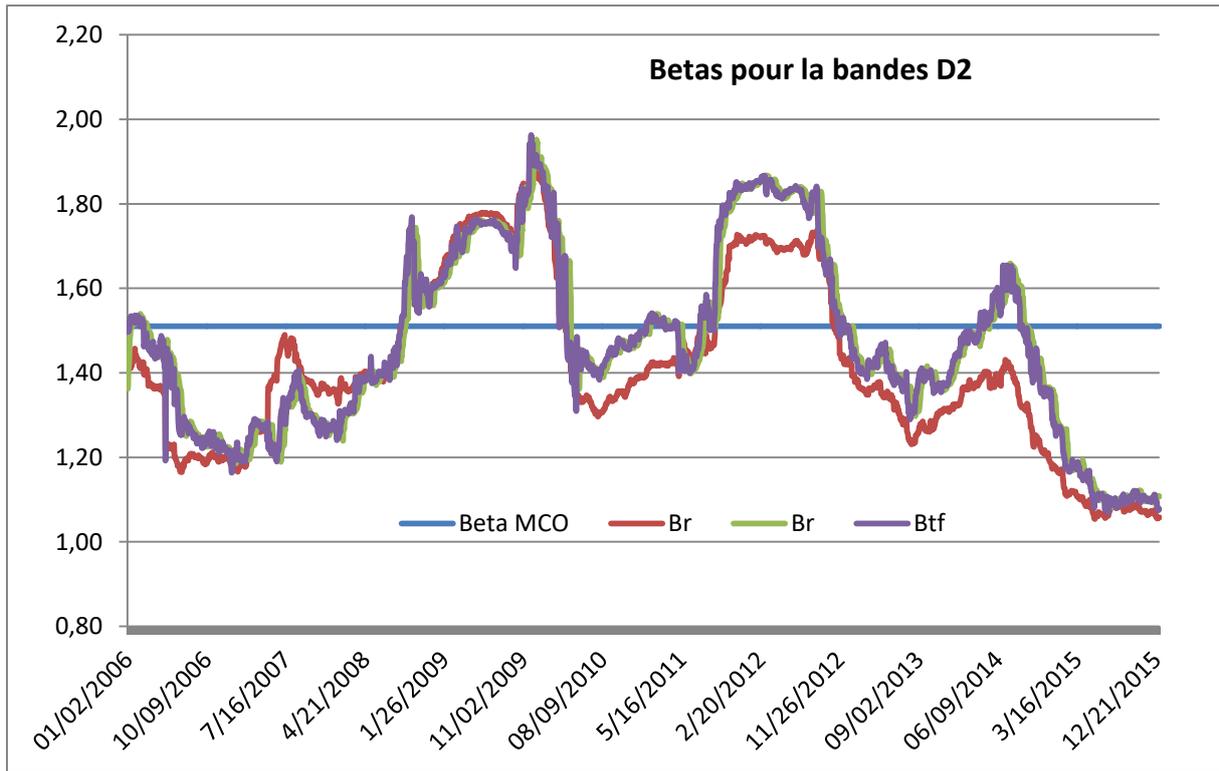
Pour un risque de 5%, Colonne LB (test de Ljung-Box): $\chi^2(5)=11,1$; Colonne ARCH (test ARCH-LM): $\chi^2(2)=5,99$; Colonne JB (test de Jarque-Bera): $\chi^2(2)=5,99$. Pour un seuil de 5%, la valeur de la statistique de Fisher est égale à 3.85, tous les coefficients de détermination sont significativement différents de zéro

- Estimations des Betas roulants β_r , β_F et β_{TF}

Nous appliquons les trois méthodes décrites précédemment afin de modéliser l'instabilité du Beta. Les Graphiques 1 illustrent la volatilité du Beta par rapport à son estimation et sa différenciation en fonction des bandes de fréquences.

Graphique 1 : Betas roulants d'AXA :





Nous notons que les Betas de court-terme (D1 et D2) sont volatiles par rapport à 1.51 mais ils restent supérieurs à 1, l'action conserve alors son profil-risque au cours du temps. A long-terme (D6), en revanche, les betas sont plus volatiles et le profil risque n'est pas conservé au cours du temps. Nous remarquons aussi un décalage croissant entre les β_F et les β_{TF} . Afin de confirmer ces observations, nous réalisons des tests de significativité sur les différences entre les Betas, et nous en calculons les moyennes absolues (Cf. Tables 2).

Table 2 : Pourcentages de betas significativement différents et erreur moyenne absolue.

% Betas différents	D1	D2	D3	D4	D5	D6
β_r et β_F	7,93	6,82	32,39	43,50	64,66	67,27
β_r et β_{TF}	7,47	4,14	34,88	42,62	59,91	66,27
β_F et β_{TF}	0,04	0,50	6,13	26,14	48,37	87,27

MAE entre	D1	D2	D3	D4	D5	D6
β_r et β_F	0,07	0,08	0,13	0,18	0,33	0,39
β_r et β_{TF}	0,07	0,08	0,11	0,17	0,28	0,35
β_F et β_{TF}	0,01	0,03	0,06	0,13	0,30	0,59

$$(MAE = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T |\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_j| \text{ pour } i = r, F, TF \text{ et } j = r, F, TF \text{ tel que } i \neq j \text{ et } T = \text{nombre de Betas roulants})$$

Nous notons qu'en moyenne les différences entre les deux méthodes (β_F et β_{TF}) sont plus importantes sur les bandes de basses fréquences (horizon long) alors qu'il n'y a quasiment pas de différences entre β_F et β_{TF} sur les hautes-fréquences (D1-D2). Ce constat concerne aussi les différences entre β_F et β_r et celles entre β_{TF} et β_r . Nous voyons, globalement, que les différences commencent à être relativement importantes à partir de D3 confirmant nos observations : l'écart d'estimation entre les β_F et β_{TF} est fort et s'accroît avec l'échelle fréquentielle.

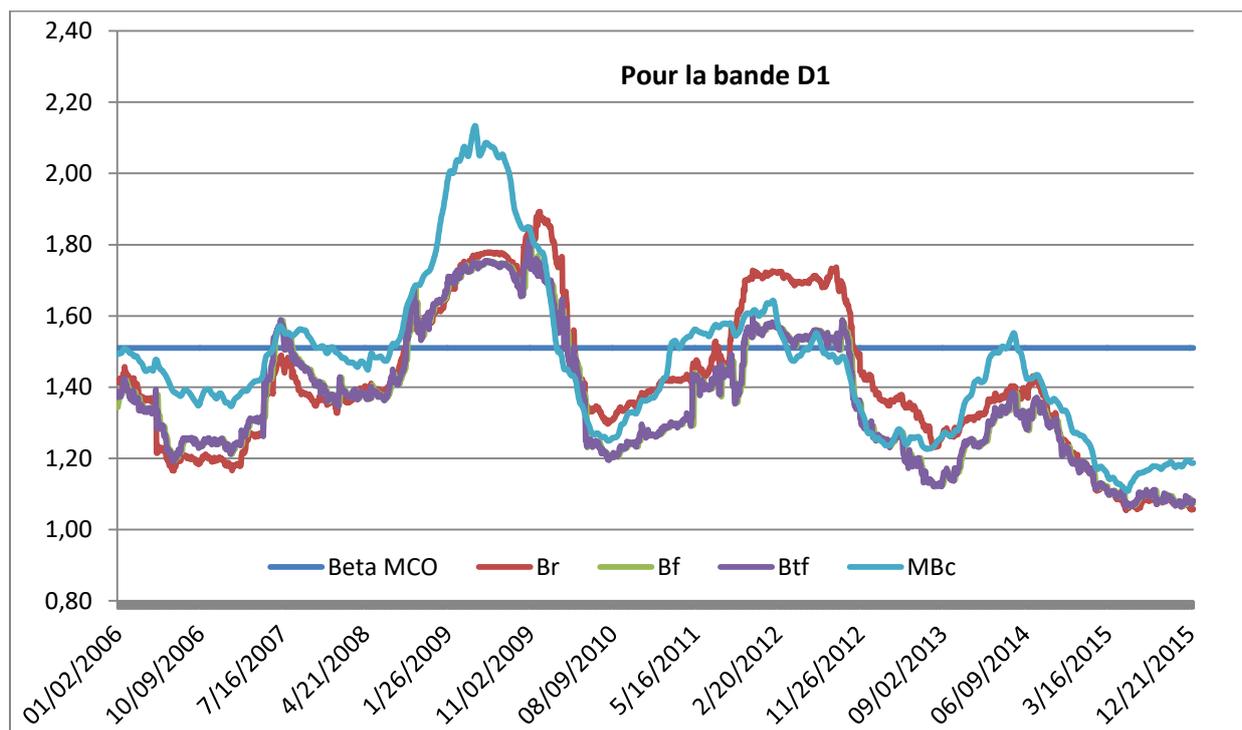
Ces constats sont liés aux fenêtres roulantes appliquées aux bandes de fréquences qui ne tiennent pas compte, lors de l'estimation, de l'inadéquation entre la taille de fenêtre (260 points) et le nombre de points support de la décomposition (2800 points). Ainsi la fenêtre tempo-fréquentielle remet à l'échelle les coefficients d'ondelettes à chaque glissement puisqu'elle réitère la décomposition. Nous ne pouvons pas conclure, cependant, sur la supériorité d'une méthode car nous n'avons pas un Benchmark fréquentiel.

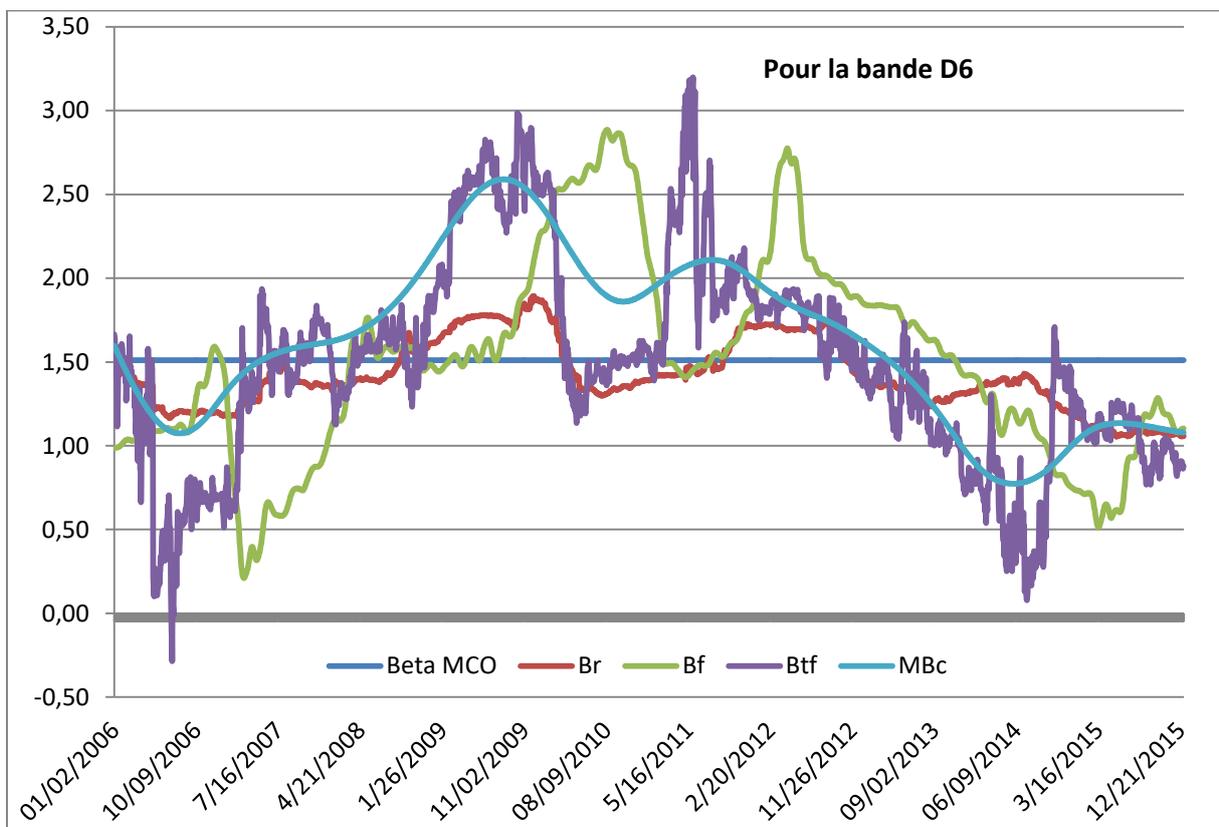
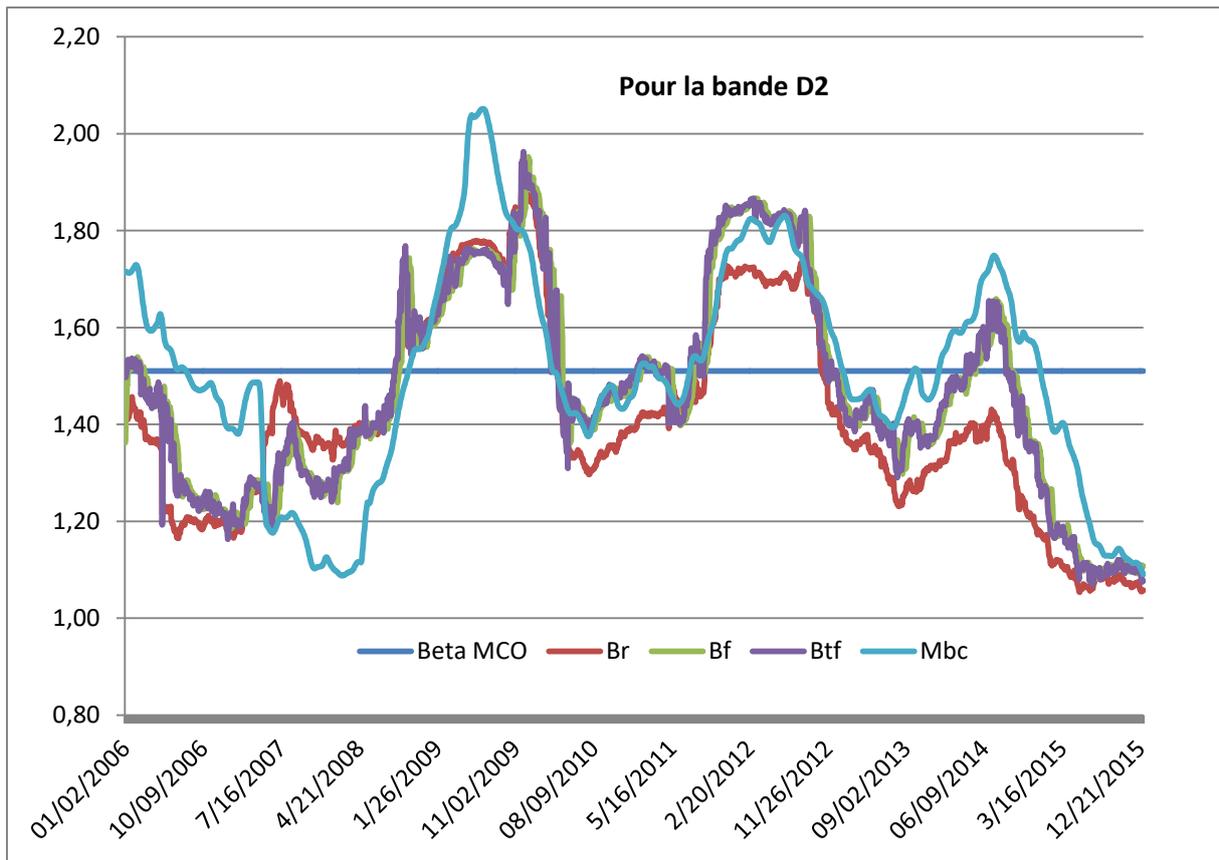
- Estimations tempo-fréquentielles du Beta avec des ondelettes continues :

L'estimation du Beta au cours du temps et des fréquences par les ondelettes continues ne fait pas directement appel à une fenêtre roulante, ce qui limite les distorsions lors du filtrage fréquentiel. En appliquant la décomposition continue en ondelette, nous estimons 2868 $\beta_{\tau,S}$ par fréquences mais pour les comparer avec les β_F et β_{TF} , nous devons réaliser plusieurs ajustements. Tout d'abord, pour simplifier l'analyse, nous retenons les bandes D1, D2 et D6 considérant des horizons d'investissement courts (2 à 4 jours) moyen-court (1 à 2 semaines) et moyen-long (3 à 6 mois).

Il faut, de plus, définir une base comparative car nous confrontons des Betas qui n'ont pas de référent commun, certains sont estimés sur des bandes de fréquences et d'autres sont calculés pour une fréquence unique. Nous proposons alors de considérer la moyenne des $\beta_{\tau,S}$ correspondants à la bandes. Une autre alternative consiste à prendre la fréquence correspondante au centre de classe de la bande considérée soit la fréquence 3 pour D1, 6 pour D2 et 96 pour D6. Par ailleurs, les β_F et β_{TF} étant issus d'une régression sur 260 points, ils s'apparentent à la valeur moyenne du beta sur cette période. Nous calculons, en conséquence, la moyenne (roulantes) des $\beta_{\tau,S}$ sur 260 observations afin de garantir la cohérence temporelle de la comparaison. Les Graphiques 2 ci-dessous illustrent les résultats obtenus.

Graphique 1 : Betas roulants d'AXA :





Note : Mbc = Moyenne des $\beta_{\tau,s}$

Nous pouvons émettre deux principaux constats :

Au basses-fréquences (D1-D2), les $\beta_{\tau,S}$ ne sont pas confondus avec les β_F et β_{TF} mais ils ont les mêmes évolutions. Au hautes-fréquences, les $\beta_{\tau,S}$ apparaissent moins volatiles et erratiques que les β_F , β_{TF} mais leur dynamique est similaire à celle des β_{TF} . Afin d'affiner cette analyse, nous calculons la moyenne des écarts absolue entre les différents Betas (Cf . Table 3).

Table 3 : écart moyen absolu d'estimation.

MAE entre	$\beta_{\tau,S}$ D1	$\beta_{\tau,S}$ D2	$\beta_{\tau,S}$ D6
β_r	0,118	0,159	0,327
β_F	0,110	0,108	0,454
β_{TF}	0,109	0,111	0,252

Il apparait que les différences sont quasiment identiques aux basses-fréquences, mais au hautes-fréquences, l'écart (absolu) moyenne $\beta_{\tau,S} - \beta_{TF}$ est le plus faible et celui $\beta_{\tau,S} - \beta_F$ le plus élevé.

Ce résultat conforte notre hypothèse, aux basses-fréquences les deux procédures d'estimation avec ondelettes discrètes et celle avec des ondelettes continues sont quasiment similaires tandis qu'aux hautes-fréquences les différences sont plus marquées. La fenêtre temporelle et la méthode avec ondelettes continus fournissent des betas dont les évolutions sont similaires. Ce constat nous amène à privilégier l'utilisation de la fenêtre temporelle plutôt qu'une application intuitive de celle-ci sur les bandes de fréquence. Des différences sont, malgré tout, observables entre les betas temporelles estimés par des ondelettes discrètes et par des ondelettes continues. Celles-ci peuvent s'expliquer, en partie, par la façon de comparer ces betas qui n'ont pas de référent commun.

Conclusion

Nous souhaitons, dans cet article, associer les ondelettes avec les régressions à fenêtres roulantes Forward. Nous établissons, à cet effet, un postulat basé sur une approche intuitive consistant à appliquer une fenêtre glissante directement sur les outputs des décompositions discrètes en ondelettes. Nous formulons, ainsi, l'hypothèse que ce postulat n'est pas compatible avec les propriétés des ondelettes et qu'il est nécessaire de réaliser une décomposition à l'intérieur de la fenêtre. Pour tester cette hypothèse, nous nous plaçons dans le cadre du MEDAF afin d'estimer les Betas roulants de l'action AXA.

Nos résultats montrent qu'il n'existe pas de différences significatives entre les Betas de court-termes issus de ces deux procédures, mais les écarts s'accroissent avec l'échelle fréquentielle. Ce constat est lié au fait que l'approche intuitive considère une unique décomposition en ondelettes discrètes, et partant, la remise à l'échelle des outputs ne tient pas compte de la taille de la fenêtre. La fenêtre tempo-fréquentielle, à l'inverse, réalise autant de décomposition en ondelettes que d'itération ce qui implique une remise à l'échelle répétée et une adéquation entre la taille de la fenêtre et la décomposition.

Il est cependant difficile de recommander une méthode plutôt qu'une autre puisque nous ne possédons pas un benchmark fréquentiel. Nous proposons alors une troisième approche basée sur des décompositions continues en ondelettes qui n'implique pas directement une fenêtre. En comparant les trois procédures, nous pouvons remarquer que les betas issus des décompositions continues suivent la même dynamique que ceux issus de la fenêtre tempo-fréquentielle. Les différences observables provenant des choix effectués pour comparer des Betas relatifs à des bandes de fréquences et d'autres liés à une unique fréquence.

Nous concluons alors que les trois procédures discrètes sont similaires si l'on suppose des horizons courts mais à plus long terme, la fenêtre tempo-fréquentielle et l'approche avec les ondelettes continues fournissent des résultats plus cohérents.

Annexes

Table A1 : Bandes de fréquences et horizon temporel

Résolution	Jours fréquentiels		Correspondance en mois	
	bornes inf	bornes sup	bornes inf	bornes sup
D1	2	4	0,09	0,18
D2	4	8	0,18	0,36
D3	8	16	0,36	0,73
D4	16	32	0,73	1,45
D5	32	64	1,45	2,91
D6	64	128	2,91	5,82
D7	128	256	5,82	11,64
D8	256	512	11,64	23,27
D9	512	1024	23,27	46,55
D10	1024	2048	46,55	93,09
D11	2048	4096	93,09	186,18
S11	4096	-	186,18	-

Table A2 : Tests de stationnarité

	PP	KPSS
AXA	-51.2187	0.074
CAC	-56.1127	0.106
Critical Value		
1% level	-3.43	0.216
5% level	-2.86	0.146
10% level	-2.57	0.119

Références

- Auth C., “Continuous Wavelet Transform and Wavelet Coherence-Implementation and Application to the Diversification Analysis of Hedge Funds Returns”, 2013.
- Bekiros S., Nguyen D.K. and Uddin G.S, “On time scale behavior of equity commodity links: implications for portfolio management”, *Journal of International Financial Market Institutions and Money*, vol 41, 2016, pp 79-121.
- Black, F., Jensen, M., Scholes, M. ,“The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Test ; *Studies in the Theory of Capital Markets*” in M. Jensen ed., New York: Praeger Publishers, 1972 , pp. 79–12.
- Brooks R.D., R.W, Faff and J.H.H Lee, “The form of time variation of systematic risk: some Australian evidence”, *Applied financial econometrics*, Vol 2, 1992, pp 191-198.
- Brooks, R.D., R.W. Faff, and M.D. McKenzie, “Time-varying Beta Risk of Australian Industry Portfolios: A Comparison of Modelling Techniques”, *Australian Journal of Management* 23(1), 1998, pp 1–22.
- Faff, R.W., Lee, J.H.H and Fry, T.R.L., “Stationarity of systematic risk : some Australian evidence”, *Journal of Finance and Accounting*, Vol 19, Issue 2, 1992 ; pp 253-270.
- Faff, R.W., Brooks, R.D., “Time-varying risk for Australian industry portfolios, an exploratory analysis”, *Journal of Business Finance and Accounting*, Vol 25, Issue 5, 1998, pp 721-74.
- Fama, E., MacBeth, J., “Risk, Return, and Equilibrium: Empirical Tests” *Journal of Political Economy* , Vol 81, 1973, pp. 607–636.
- Gençay, R., Selçuk, F., and Whitcher, B., “Systematic Risk and Timescales “, *Quantitative Finance*, Vol 3 issue 2, 2003,pp 108-116.
- Groenewold, N.,and Fraser, P., “Time Varying Betas and Macroeconomic influences”, discussion paper, departement of economics , University of Western Australia, 1997.
- Mallat, S., “A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation” ;*IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* Vol 11 num 7 July 1989.
- Mallat, S., *Une exploration des signaux en ondelettes*, Ecole polytechnique, 2009.
- Mallat, S., *Wavelet tour of signal processing: the sparse way*, Academic Press, 2009.
- Mestre R. and Terraza M., “Time-frequencies analysis of CAPM-Application to the CAC 40”,*MPRA Paper No 86272*, 2017.
- Mestre R. and Terraza M., “Multidimensional Time-Frequency Analysis of the CAPM”, *ITISE 2017 Conference Proceedings*, Issue 2, pp 1187-1200, 2017.
- Mestre R. and Terraza M., “Time-Frequency varying Beta Estimation-A continuous wavelets approach-”, *Economics Bulletin* 38 (4) pp 1796-1810, 2018.
- Sharpe, W. “Capital Asset Prices: a Theory of Market Equilibrium under risk” ; *Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3 (Sep., 1964), 1964, pp. 425-442.
- Yeo, J., “Modelling Time-Varying Systematic Risk in Australia”; *Proceedings of the International Congress on Modelling & Simulation*. ed. / F. Ghessemi; M. McAleer; L. Oxley; M. Scoccimarro. Vol. 3, Canberra. ed. Western Australia : Modelling and Simulation Society of Australia and New Zealand Inc., 2001, p. 1565-1570.