Dimensional analysis and its application in economics

Quaas, Georg

Universität Leipzig

10 April 2019

Die Dimensionsanalyse und ihre Anwendung in der Ökonomik

Georg Quaas

1. **Ein seltenes Plädoyer für die Dimensionsanalyse**

Nils Fröhlich und Fabian Richter (2018) plädieren für die Anwendung der Dimensionsanalyse (DA) in der Ökonomik. Obwohl ihr Artikel in einer Festschrift enthalten ist, für die sich wohl nicht jeder interessieren wird, sollte dieses Plädoyer nicht unbeachtet bleiben. Im Vergleich zum Signifikanzproblem stellt es eines der mehr elementaren, aber darum nicht weniger wichtigen messtheoretischen Probleme der theoretischen Verarbeitung von Resultaten empirischer Forschung dar. Unter der DA verstehen die Autoren die Beachtung der Maßeinheiten, mit deren Hilfe ökonomische Größen gemessen werden. Insbesondere muss die sich auf der linken Seite einer Gleichung ergebende Maßeinheit dieselbe sein wie die auf der rechten Seite. Die Dimensionsanalyse umfasst allerdings mehr als die Überprüfung von Maßeinheiten. Um ein einfaches Beispiel zu nennen: (i) Die Werte von handelbaren Gütern werden üblicherweise in Preisen angegeben, wobei Preise den Wert der Gütereinheit darstellen, also die Dimension Wert je (bestimmter) Gütereinheit haben. Dagegen werden Mengen entweder (ii) in ihren „natürlichen“ Einheiten oder (iii) in deflationierten Werten dargestellt. Ein Vergleich zeigt, dass die Beachtung der Maßeinheiten allein nicht ausreicht, um die formale Korrektheit von Gleichungen abzusichern: Nominale Wertangaben (i) können dieselbe Einheit wie reale Wertangaben (iii) haben, sollten aber trotzdem nicht gleichgesetzt werden. Vielmehr ist es so, dass in den neuen, ab 2005 gültigen Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen jedes Aggregat mindestens in acht verschiedenen Dimensionen dargestellt werden kann (Quaas 2010: 37). Was man aufgrund der bloßen Unterschiedlichkeiten der Maßeinheiten nicht gleichsetzen kann, wären beispielsweise Wertangaben in Preisen und natürliche Mengenangaben – wie zum Beispiel: 100 Euro = 1 Tonne Äpfel.

Die Beachtung der Maßeinheiten ist also nur eine sehr grobe Methode, um die formale Korrektheit einer Gleichung, ob nun theoretisch abgeleitet oder nicht, zu sichern. Der Physiker lernt die Anwendung der DA schon im ersten Semester zu beherrschen. Stellt er in einem höheren Semester eine Gleichung auf, die bei Anwendung der DA nicht korrekt ist, wäre das ein Grund zur Exmatrikulation (was man aber bei der geringen Zahl von Physikstudenten nicht tun wird). Dagegen fällt es Ökonomen in der Regel schwer, auch nur die Wichtigkeit der Angabe von Maßeinheiten einzusehen.

Deshalb ist es verdienstvoll, wenn Fröhlich und Richter sich für die Anwendung der DA einsetzen. Sie gehen noch einen Schritt weiter und formulieren 4 Regeln, die zu beachten wären. Aus eigener Erfahrung darf ich sagen: Der Physiker kennt im Allgemeinen nur die Regel 1 und diese auch in etwas allgemeinerer Form. Sie lautet schlicht und einfach so wie schon oben formuliert: Jede mathematische Gleichung muss homogen bezüglich der Maßeinheiten der in sie eingehenden Größen sein. Dass man Größen, die verschiedene Maßeinheiten haben, nicht addieren und subtrahieren kann, versteht sich von selbst. Das wird oft mit dem nur partiell zutreffenden Satz plausibilisiert, dass man Äpfel und Birnen nicht addieren kann. Falls man Obst in Stück oder Kilogramm angibt, kann man übrigens auch das.

2. **Dimension und Maßeinheit**

Die Anwendung der DA erfordert etwas Übung und ist zum Teil eine Sache des mathematischen Verständnisses. Man muss beispielsweise wissen, wie eine Taylorreihe richtig notiert wird, und dass log(a) + log(b) = log(ab). Schon aus dieser primitiven Formel ergibt sich, dass man den Logarithmus von Größen unterschiedlicher Dimension durchaus addieren kann. Ein Beispiel wäre die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion:

$$y = AL^{\alpha} K^{\beta},$$

die in die logarithmische Gleichung

$$\log y = a + \alpha \log L + \beta \log K + \varepsilon$$

umgeformt werden kann (Intriligator 1978: 266 f.). Ökonometriker verwenden diese Gleichung seit Jahrzehnten, und sie ist auch hinsichtlich der Maßeinheiten korrekt, obwohl Y, L und K keine dimensionslosen Größen sind. Es ist falsch, wenn Fröhlich und Richter in ihrer Regel 4 fordern, dass Exponenten und Argumente transzendenter Funktionen dimensionslose Größen sein müssen. Hier zeigt sich, dass sie die DA selber nicht ganz verstanden haben.

Vermutlich sind die Autoren in diesem Punkt auf eine Praxis hereingefallen, die bei konsequenter Beachtung der DA korrigiert werden müsste, nämlich dass Elastizitäten, die bekanntlich nicht von den Maßeinheiten der Basisgrößen abhängen, oft als „dimensionslos" verstanden werden. Streng genommen gibt es aber in einer empirischen Wissenschaft keine dimensionslosen Größen: Auch wenn sich Maßeinheiten formal wegkürzen, ist die übrig bleibende Zahl Ausdruck eines bestimmten Verhältnisses, dem implizit eine Maßeinheit oder eine Kombination von Maßeinheiten zugeordnet ist, die dann meistens *neben* der Formel – als Hinweis auf ihren Gültigkeitsbereich oder in Form einer Definition – notiert wird. Hier zeigt sich noch einmal, dass sich die DA nicht auf die Beachtung der Maßeinheiten beschränkt, die *innerhalb* einer Formel auftreten.

3. **Anwendung der DA auf werttheoretische Theorien**

Fröhlich und Richter demonstrieren die Wichtigkeit der DA, indem sie den formalen Test der Kontrolle von Maßeinheiten bei der Lösung eines Problems anwenden wollen, für das sich heutzutage nur noch wenige Ökonomen interessieren: Der Vergleich der empirischen Warenpreise verschiedener Branchen bzw. Sektoren mit den Werten dieser Waren, die sich aufgrund der neoricardianischen Preisgleichungen bei einer Profitrate von null theoretisch bestimmen lassen. Die Autoren tun das in dem unter den verbliebenen Werttheoretikern ziemlich weit verbreiteten Glauben, jene „direkten Preise" des von Piero Sraffa (1967) begründeten Modells hätten etwas mit den objektiven Werten der Klassiker der politischen Ökonomie zu tun. Hier das Problem der Autoren:

In der werttheoretisch orientierten Literatur gibt es den Streit, ob die gefundenen Korrelationen zwischen Werten und Preisen von den Mengenverhältnissen abhängen oder nicht. Das ist natürlich eine prachtvolle Gelegenheit, die Nützlichkeit der DA zu demonstrieren, so scheint es jedenfalls. Fröhlich und Richter stellen eine Regressionsgleichung auf, die ihrer Meinung nach DA-mäßig korrekt ist:

$$\log\left(\frac{p_i x_i}{p_j x_j}\right) = \alpha + \beta \log\left(\frac{d_i x_i}{d_j x_j}\right) + u_{ij} \text{ (Gleichung 5)}$$

Dabei bedeuten p_i den Preis des Gutes i, x_i die Menge des Gutes i, und d_i ist ein Proxy für den Wert des Gutes i im Sinne der objektiven Wertlehre – Analoges gilt für das Gut j. Dem stellen die Autoren zwei formal identische Gleichungen gegenüber (7+8, hier nur 8 berichtet), die von Díaz und Osuna (2007) verwendet werden und die zeigen sollen, dass die Korrelation zwischen Werten und Preisen von den Mengenverhältnissen abhängen:

$$\log\left(\frac{p_i x_i}{p_j x_j}\right) = \alpha + \beta \log\left(\frac{d_i x_i}{d_j x_j}\right) + (1-\beta)\log\left(\frac{x_i}{x_j}\right) + u_{ij} \text{ (Gleichung 8)}$$

Die Anwendung der DA durch Fröhlich und Richter (2018: 85) ergibt, dass die Gleichung (8) nicht korrekt sein kann. Angeblich verletzt sie die oben bereits erörterte Regel 4. Da diese Regel aber falsch ist, fehlt dieser Kritik an Díaz und Osuna die Begründung.

Es gibt aber ein völlig anderes Problem, an das offenbar keiner der Autoren gedacht hat. Der inhaltliche Fehler solcher Versuche der Überprüfung der klassischen Werttheorie besteht darin, dass in den gängigen Modellen in allen Sektoren „einfache Arbeit“ unterstellt wird (Fröhlich, Richter 2018: 85, Gleichung 9). Zwar kann man sich dabei auf Adam Smith und Karl Marx berufen, aber beide verwandten diese Vereinfachung in ihren Schriften nur zu Demonstrationszwecken, also um es ihren Lesern leichter zu machen, den werttheoretischen Ansatz zu verstehen. Keiner von beiden hat jemals behauptet, dass sämtliche Arbeiter in den verschiedenen Unternehmen, Branchen und Sektoren je Zeiteinheit den gleichen Wert schöpfen. Im Gegenteil! Ihre verbalen Aussagen weisen ausdrücklich darauf hin, dass es so etwas wie Kompliziertheitsgrade der Arbeit gibt (Marx 1890: 211; Smith 1910: 60, 77, 88 ff.). Empirische Tests, die auf einer falschen Messtheorie – in diesem Fall auf den direkten Preisen des neoricardianischen Modells – aufbauen, haben nur wenig mit den Theorien der Klassiker zu tun, auch wenn das manche im Interesse der Aufwertung ihres eigenen Modells behaupten. Direkte Preise sind nicht für die Überprüfung der objektiven Wertlehre geeignet.

Doch zurück zur Dimensionsanalyse! Es hat schon seinen Sinn, wenn Physiker im Studium regelrecht darauf trainiert werden, mit der Sprache und dem Handwerkszeug der Mathematik umzugehen. Auch wenn Ökonomie-Studenten die Mathematiklastigkeit ihrer Ausbildung beklagen, so lässt doch die in der Zunft bislang etablierte Fähigkeit zur korrekten Anwendung der Mathematik auf ökonomische Probleme in manchen Fällen sehr zu wünschen übrig. Aktuell zeigt das die Analyse von Fröhlich und Richter, auch wenn das Anliegen der Autoren begrüßenswert ist. Im Folgenden werden die soeben aufgeworfenen Fragen detailliert untersucht und dabei das deutlich gemacht, was legitimer Weise Inhalt einer auf die Ökonomik bezogenen DA sein müsste.

4. **Gibt es in der Ökonomik dimensionslose Größen?**

Es gibt eine Reihe von empirisch messbaren Größen in der Ökonomik, die als reine Zahlen gelten: Elastizitäten, der Anteil der Arbeitnehmer am Volkseinkommen, Kettenindizes zur Darstellung der zeitlichen Entwicklung von realen volkswirtschaftlichen Aggregaten, Inflationsraten usw. Im Folgenden wird anhand der Elastizitäten exemplarisch dargestellt, in welcher Weise Größen, die keine Maßeinheit tragen, in der DA berücksichtigt werden müssen. Der mit Elastizitäten weniger vertraute Leser wird auf die Lehrbuchliteratur verwiesen. Eine ausführliche Darstellung der Nachfrage- und Angebotselastizitäten findet man z.B. bei Mankiw und Taylor (2008), die dem Thema das ganze 5. Kapitel ihres Makro-Buches widmen.

Eine allgemeine Definition von Elastizitäten lautet (Abel, Bernanke 2005: 604): Ist Y abhängig von X, so dass Y sich ändert, wenn sich X ändert, so definiert man die X-Elastizität von Y als die prozentuale Änderung von Y geteilt durch die prozentuale Änderung von X:

$$E = \frac{\frac{\Delta Y}{Y} \cdot 100}{\frac{\Delta X}{X} \cdot 100} = \frac{\Delta Y \cdot X}{\Delta X \cdot Y}$$

Trägt E ein negatives Vorzeichen, so betrachtet der Ökonom den Absolutbetrag von E. Das ist zum Beispiel bei der Preiselastizität der Nachfrage nach „normalen" Gütern der Fall. Ist x_j die Menge eines normalen Gutes *j* und p_j der Preis dieses Gutes, so gilt:

$$\varepsilon_j = \left| \frac{dx_j \cdot p_j}{dp_j \cdot x_j} \right| = \left| \frac{d \log x_j}{d \log p_j} \right|$$

Wie man leicht sieht, kürzen sich die Einheiten, mit deren Hilfe Mengen und Preise gemessen werden, in der Definitionsgleichung heraus, so dass man zu folgender Aussage über Elastizitäten gelangt: „…they are independent of the units of measurement of the good, prices…" etc. (Intriligator 1978: 211 f.) Elastizitäten sind also reine Zahlen. Aber haben sie deshalb keine Dimension?

Eine reine Zahl ohne Kontext hat keinen Bezug mehr zum Inhalt einer ökonomischen Theorie. Es ist klar, worin der Kontext einer Elastizität besteht, es ist ihre Definition: ε_j ist die Preiselastizität des Gutes *j* und nicht die des Gutes *i*, außerdem ist es die Elastizität des Gutes *j* in Bezug auf seine Abhängigkeit vom *Prei*s und nicht in Bezug auf seine Abhängigkeit vom *Haushaltseinkommen*. Indem man die Elastizitäten verschiedener Güter bestimmt, kann man die Wirkung von Preisänderungen auf den Umsatz in den verschiedenen Branchen berechnen und miteinander vergleichen. Für den Umsatz U_j des Gutes *j* gilt zum Beispiel:

$$U_j\left(x_j, p_j, \Delta p_j\right) \approx U_j\left(x_j, p_j, 0\right) + \left(1 - \varepsilon_j\right) x_j \Delta p_j$$

Es ist also der Kontext, in dem eine Elastizität definiert und gemessen wird, der bei der theoretischen Verarbeitung der Messresultate beachtet werden muss und der deshalb auch Gegenstand der Dimensionsanalyse ist. Der Kontext definiert bei ökonomischen Größen, die explizit keine Maßeinheit haben, die zu beachtende Dimension.

Man kann noch einen Schritt weiter gehen und eine Elastizität von 1 als „Einheitselastizität" bezeichnen (Mankiw, Taylor 2008: 107). Damit hätte man formal eine Maßeinheit definiert, in der jede andere Elastizität gemessen wird. Dabei wird aber die konkrete Dimension, auf die sich die jeweilige Elastizität bezieht, nicht berücksichtigt. Wollte man diese angeben, so würde sie lauten: „Änderung des Gutes *j* in Prozent infolge einer 1-prozentigen Änderung seines Preises". Zugegeben – etwas umständlich, aber man muss die konkrete Dimension im Hinterkopf haben, wenn man diese Größen korrekt anwenden will.

5. **Die Einheiten in transzendenten Funktionen**

Die Autoren behaupten, dass die Exponenten und Argumente transzendenter Funktionen immer reine Zahlen oder dimensionslose Quantitäten sein müssten (Fröhlich, Richter 2018: 82, Regel 4). Daran ist richtig, dass Funktionen generell mathematische Objekte sind, die Zahlen einander zuordnen, die keine Maßeinheiten tragen. Wäre es jedoch verboten, Größen mit

Maßeinheiten in Funktionen einzusetzen, wäre der Anwendungsbereich der Mathematik arg beschränkt. Man setzt diese Größen ein, indem man die Maßeinheiten ignoriert. Da sie aber stets im Hintergrund stehen und eine Änderung der Maßeinheiten Konsequenzen hat, besteht die Aufgabe darin, diese Konsequenzen zu eruieren. Eben das ist die Aufgabe der DA. Im Extremfall kann das bedeuten, angebliche Gesetzesaussagen wertlos zu machen, weil sie vom Numéraire abhängen (Quaas 1998) und damit keinen eindeutig bestimmten Inhalt haben.

Fröhlich und Richter begründen ihre Regel 4 mit der Entwicklung der Exponentialfunktion in eine unendliche konvergente Reihe (nach dem Mathematiker Brook Taylor (1685-1731)), aus der angeblich folgen würde, dass der Exponent eine dimensionslose Zahl sein müsse – wegen des Auftretens von Quadraten, allgemein: Potenzen höherer Ordnung von t in dieser Reihe. Ist diese Argumentation stichhaltig?

Die Taylorreihe einer beliebigen, stetigen und mehrmals differenzierbaren Funktion $f(t)$ lautet:

$$f(t) = f(t_0) + \left.\frac{df}{dt}\right|_{t_0} \frac{(t-t_0)}{1!} + \left.\frac{d^2 f}{dt^2}\right|_{t_0} \frac{(t-t_0)^2}{2!} + \left.\frac{d^3 f}{dt^3}\right|_{t_0} \frac{(t-t_0)^3}{3!} + \ldots$$

Ist t eine empirische Größe, so hängt sie zwangsläufig von der Definition der Maßeinheit dieser Größe ab und die Funktion $f(t)$ unter Umständen ebenfalls. Bei der Verarbeitung der Messresultate wird die zugrunde liegende Maßeinheit in der Regel nicht mitgeführt, so dass sich t rechnerisch auf eine reine Zahl reduziert. Die Dimensionsanalyse erfordert, die tatsächliche Struktur der Variablen t zu notieren: $t = z \cdot [t]$, wobei z eine reine Zahl ist und $[t]$ die Maßeinheit der empirischen Größe t darstellen soll (Quaas 2001: 81 ff.). Berücksichtigt man die Maßeinheit in der Taylorreihe, so hat das folgende Konsequenzen:

(1) Der Term $f(t_0)$ ist unproblematisch, er führt die in der Maßeinheit $[t]$ gemessene Größe an der Stelle t_0 aufgrund der allgemeinen Funktion $f(t)$ in die Maßeinheit dieser Funktion über, in der Regel also eine Zahl. Wir bezeichnen sie mit: $[f]$.

(2) Die erste Ableitung der Funktion $f(t)$ nach t an der Stelle t_0 hat die dimensionale Struktur $[f]/[t]$. Diese Ableitung wird mit dem Faktor $\frac{(t-t_0)}{1!}$ multipliziert, der die Maßeinheit $[t]$ hat. Daraus ergibt sich für den zweiten Term in der Taylorreihe die resultierende Maßeinheit: $[f][t]/[t] = [f]$.

(3) Die zweite Ableitung der Funktion $f(t)$ nach t an der Stelle t_0 ist identisch mit der Ableitung der ersten Ableitung. Da die erste Ableitung die dimensionale Struktur $[f]/[t]$ hat, erzeugt die nochmalige Ableitung die dimensionale Struktur: $[f]/[t][t] = [f]/[t]^2$. Die zweite Ableitung wird mit dem Faktor $\frac{(t-t_0)^2}{2!}$ multipliziert, der die Maßeinheit $[t]^2$ hat. Daraus ergibt sich für den dritten Term in der Taylorreihe die resultierende Maßeinheit: $[f][t]^2/[t]^2 = [f]$.

(4) Es bedarf sicherlich keiner vollständigen Induktion, um einzusehen, dass auch die weiteren Terme der Taylorreihe die Dimension $[f]$ haben.

Daraus ergibt sich die Schlussfolgerung, dass aus der Entwicklung einer Funktion in eine Taylorreihe keineswegs die Forderung abgeleitet werden kann, dass die unabhängige Variable, von der die Funktion abhängt, eine dimensionslose Größe sein muss.

Ist insbesondere $y(t)=e^t$, ein Beispiel das die Autoren verwenden, so hat das folgende Implikationen: y ist eine reine Zahl, also ohne Kontext dimensionslos, weil y identisch mit der *e*-Funktion gesetzt worden ist $[f]=1$. Der Exponent in der e-Funktion kann trotzdem eine Größe sein, die eine Maßeinheit hat, da sich diese ab dem zweiten Term der Taylorreihe herauskürzt. Für jeden Term der Taylorreihe gilt: $[f]=1$.

Damit ist die Behauptung von Fröhlich und Richter, der Exponent einer *e*-Funktion müsse eine reine Zahl sein, widerlegt. Dieses Ergebnis lässt sich ohne Mühe auf andere transzendente Funktionen übertragen.

6. **Skaleninvarianz und Dimensionsanalyse**

Die originale Cobb-Douglas-Produktionsfunktion, so wie sie heutzutage oft verstanden und gelehrt wird, ist so definiert, dass sie skaleninvariant ist. Sei also die gesamtwirtschaftliche Produktionsfunktion durch $Y=Y(L,K)$ gegeben. Skaleninvarianz heißt, dass

$$Y(\alpha L,\alpha K)=\alpha Y(L,K).$$

Die ökonomische Bedeutung der Skaleninvarianz besteht darin, dass der Output eine lineare Funktion vom gesamten Input ist. Wenn also die eingesetzten Faktoren proportional zueinander zu- oder abnehmen, nimmt der Output im gleichen Maße zu oder ab.

Unter dem Aspekt der DA betrachtet bedeutet Skaleninvarianz, dass sich die Produktionsfunktion umgekehrt proportional zu einer Änderung der Maßeinheit der Produktionsfaktoren verhält: Je kleiner die Maßeinheit, umso größer das Messresultat und dieses überträgt sich im Fall einer Exponentialfunktion auf die Zielvariable. Dieser Zusammenhang setzt u.a. voraus, dass alle drei Größen in der gleichen Maßeinheit – zum Beispiel in Verketteten Volumina – gemessen werden. In ihrer ursprünglichen Formulierung war das jedoch nicht der Fall. Cobb und Douglas (1928: 140, Fn.2) waren an einem physischen Maß für das Kapital interessiert. Empirisch standen ihnen aber nur Angaben zum prozentualen Anteil von Maschinerie und Ausrüstungen am Gesamtkapital und deren Wert in Dollar zur Verfügung. Im Fall des Faktors Arbeit konnte auf Beschäftigtenzahlen zurückgegriffen werden, also auf eine Größe in einer „natürlichen“ Einheit, die dann aber zu einem Index verarbeitet wurde. Ebenfalls als ein Index, wenn auch als ein anderer, wurde das physische Volumen des Outputs gemessen. Auf dieser problematischen empirischen Grundlage leiteten Cobb und Douglas ihre berühmte Formel her:

$$P' = 1.01\cdot L^{3/4}C^{1/4}$$

Von Skaleninvarianz kann hier – streng genommen – nicht gesprochen werden, auch wenn die Formel das formal gesehen hergibt.

Die Messung des Kapitals in physischen Einheiten findet ihre Fortsetzung in der modernen Input-Output-Analyse, die zwar in der Regel auf der Grundlage monetärer Größen arbeitet, aber auch physische Angaben verarbeiten kann. Dies hat zur Konsequenz, dass die Maßeinheiten zwischen den verschiedenen Zeilen einer IO-Matrix – die an die Stelle der Exponentialfunktionen tritt – verschieden sind (Miller, Blair 2009: 51 ff.).

Gesetzt, die drei variablen Größen einer Produktionsfunktion vom Cobb-Douglas-Typ beruhen jede auf ihrer eigenen Maßeinheit, so wie es de facto bei Cobb-Douglas (1928) der Fall war:

$$Y = AL^{\alpha}K^{\beta}$$

wobei $Y = y \cdot [Y]$, $L = l \cdot [L]$, $K = k[K]$ und alle kleinen Buchstaben y, l, k reine Zahlen bedeuten. Dann ist:

$$y[Y] = A(l \cdot [L])^{\alpha}(k \cdot [K])^{\beta}$$

Es versteht sich, dass bei Berechnung des Zusammenhangs zwar die Existenz von Maßeinheiten unterstellt wird, diese aber beim Einsetzen der Zahlen y, l, k ignoriert werden. An dieser Stelle setzt die DA ein:

Angenommen, die Maßeinheit für den Faktor Arbeit ist eine Beschäftigteneinheit: $[L] =$ ein Selbständiger oder ein Arbeitnehmer. Wir unterstellen, dass alle Arbeitnehmer und alle Selbständigen einer Volkswirtschaft 10 Stunden pro Tag arbeiten und gehen zu der neuen, zehnmal kleineren Maßeinheit $[L'] =$ eine Stunde Arbeitszeit über: $[L] = 10[L']$. Dann ändert sich die Produktionsfunktion wie folgt:

$$y[Y] = A'(l \cdot 10[L'])^{\alpha}(k \cdot [K])^{\beta}$$

Da inhaltlich, d.h. ökonomisch, gesehen, der gleiche funktionale Zusammenhang wie oben vorliegt, muss gelten:

$$A(l \cdot [L])^{\alpha} = A'(l \cdot 10[L'])^{\alpha} = A'(l \cdot [L'])^{\alpha} 10^{\alpha}$$

Also:

$$A' = \frac{A}{10^{\alpha}} \quad .$$

Der vermittelnde Faktor A' muss also zehnmal kleiner sein, um auf die gleichen Zahlenwerte zu kommen.

Dieses Ergebnis lässt sich verallgemeinern: Führt eine Änderung des Maßstabes für den Faktor Arbeit zu einer Multiplikation dieses Faktors mit der Zahl δ und eine Änderung des Maßstabes für den Faktor Kapital zu einer Multiplikation dieses Faktors mit der Zahl γ, dann ändert bestimmt sich der Koeffizient A' wie folgt:

$$A' = \frac{A}{\delta^{\alpha}\gamma^{\beta}} \ .$$

Der Faktor A bzw. A' vor den beiden Potenzen hat also die Funktion, Änderungen der Maßeinheiten auszugleichen. Werden Kapital und Arbeit in der gleichen Maßeinheit gemessen, ist also $\delta = \gamma$ und gilt außerdem nach Cobb-Douglas $\alpha + \beta = 1$, so ist $A' = A$, was gleichbedeutend mit *Skaleninvarianz* ist.

Die Werte mathematischer Funktion, die in der Ökonomik Anwendung finden, sind reine Zahlen oder andere Objekte wie Vektoren und Matrizen, deren Elemente ebenfalls Zahlen sind. Der Faktor A in der CD-Produktionsfunktion hat deshalb die Funktion, die Funktionswerte implizit mit einer Maßeinheit zu versehen, so dass sie mit der Zielvariablen $y[Y]$ gleichgesetzt werden können. Die Maßeinheit des Faktors A ist identisch mit der der Zielvariablen: $[A] = [Y]$.

Die DA der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion führt zusammenfassend zu folgendem Ergebnis:

(1) Ökonomische (maßeinheitsbehaftete) Größen können Argumente und Exponenten transzendenter Funktionen sein. Beim Einsetzen werden zwar die Maßeinheiten ignoriert, sie haben aber trotzdem Einfluss auf den Funktionswert.

(2) Eine Änderung der Maßeinheiten von Argumenten und Exponenten transzendenter Funktionen muss durch entsprechende Anpassung der sonst noch auftretenden Faktoren zahlenmäßig ausgeglichen werden.

(3) Da mathematische Funktionen, die in der Ökonomik vorkommen, immer nur reine Zahlen (bzw. Objekte, deren Elemente reine Zahlen sind) produzieren, muss über entsprechende Faktoren auch eine Anpassung der Maßeinheiten erfolgen. Dies geschieht oft implizit und unterstellt, dass der Theoretiker weiß, in welchen Dimensionen sich seine Rechnungen bewegen. Eben dies ist der Inhalt der Dimensionsanalyse, deren sich der Empiriker meistens instinktiv richtig bedient, die aber auch explizit dargestellt werden kann.

7. **Anpassung einer vereinfachten Logarithmusfunktion**

Zur Vorbereitung einer ökonometrischen Schätzung kann man die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion in ihre logarithmische Gestalt umformen:

$$\log Y = a + \alpha \log L + \beta \log K + \varepsilon$$

Da die Elastizitäten α und β so wie der Logarithmus keine Maßeinheiten haben, gibt es hier keinen weiteren Anpassungsbedarf außer dem, was oben bereits gesagt worden ist.

In der Praxis einer ökonometrischen Schätzung kann diese Gleichung mit folgender Argumentation weiter vereinfacht werden: Die Variablen Y, L, K sind zahlenmäßig oft sehr groß. Im Umfeld großer Zahlen verhält sich der Logarithmus annähernd linear, so dass mit sehr guter Genauigkeit die folgende Regressionsgleichung geschätzt werden kann:

$Y = a + \alpha \cdot L + \beta \cdot K + \varepsilon$

Haben alle Variablen die gleiche Maßeinheit, so bedarf es lediglich einer Anpassung der Konstanten an die Zielvariable: $a = [Y]$. Im Falle unterschiedlicher Maßeinheiten übernehmen zusätzlich die Parameter α, β die Funktion der Anpassung. Beispielsweise ist: $[\alpha] = [Y]/[L]$. Verbal formuliert lautet die Dimension von α nach der Anpassung: „Änderung von Y infolge einer Änderung von L." Streng genommen sind α, β nun keine Elastizitäten mehr, auch wenn – wie in einem Spezialfall der CES-Produktionsfunktion $\alpha + \beta = 1$ gilt (Intriligator 1978: 275, Formel 8.3.39).

8. **Zusammenfassung**

Die Dimensionsanalyse hat die Aufgabe, die formale Korrektheit von Formeln in einer empirischen Disziplin zu überprüfen und die Auswirkungen einer Änderung von Maßeinheiten auf gesetzesartige Formulierungen auszuloten. Dabei ist Skaleninvarianz nur ein Spezialfall, um die Neutralität von Änderungen der Maßeinheiten auf die zu erklärende Variable sicherzustellen. Im Allgemeinen sind mathematische Funktionen und damit auch ihre Anwendungen in einer Fachwissenschaft wie der Ökonomik nicht skaleninvariant. Das allein dürfte ein hinreichender Grund sein, sich intensiver mit der Frage der Abhängigkeit von gesetzesartigen Formulierungen von den Maßeinheiten der in sie integrierten Variablen auseinander zu setzen. In einer empirischen Wissenschaftsdisziplin kann es keine dimensionslosen Größen geben. Auch wenn es zahlreiche Beispiele für Variablen gibt, die keine Maßeinheiten tragen, die also scheinbar reine Zahlen sind, so bedeuten diese Variablen doch etwas Bestimmtes in der beobachtbaren Realität. Sie erfassen ein für die Fachwissenschaft wichtiges Verhältnis, das eben mehr als nur eine Zahl ist. Die Dimension einer empirischen Größe ist in dem Kontext verankert, der sie definiert. In der Regel sind das die Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen, die schon für einfache Aggregate wie das BIP, die Investitionen oder die Exporte acht verschiedene Dimensionen kennen, mit deren Hilfe sie vermessen werden. Die meisten davon werden in Preisen gemessen und berichtet, tragen also dieselbe Maßeinheit, obwohl sie unterschiedlich sind und einer unterschiedlichen Behandlung in einer ökonomischen Theorie bedürfen.

9. **Literaturverweise**

Abel, Andrew B.; Bernanke, Ben S. (2005): Macroeconomics, Fifth Edition. Boston etc.

Cobb, Charles W.; Douglas, Paul H. (1928): A Theory of Production. In: The American Economic Review, Vol. 18, No. 1, 139-165.

Díaz, Emilio; Osuna, Rubén (2007): Indeterminacy in price-value correlation measures. In: Empirical Economics, 33(3): 389-399.

Fröhlich, Nils; Richter, Fabian (2018): Measuring price-value deviations in the light of Dimensional Analysis. In: Gischer, Horst; Hartwig, Jochen; Sahin, Bedia: Bewegungsgesetze des Kapitalismus. Marburg: 77-93.

Intriligator, Michael D. (1978): Econometric Models, Techniques and Applications. Amsterdam, Oxford.

Mankiw, N. Gregory; Taylor, Mark P. (2008): Grundzüge der Volkswirtschaftslehre, 4. Auflage. Stuttgart.

Marx, Karl (1890): Das Kapital, Band 1. In: Marx-Engels-Werke, Band 23. Berlin.

Miller, Ronald E.; Blair, Peter D. (2009): Input-Output Analysis, Second Edition. Cambridge, New York etc.

Quaas, Georg (1998): Die Abhängigkeit des Preis-Wicksell-Effekts von der Numérairewahl. In: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Bd.217/2: 227-243.

Quaas, Georg (2001): Arbeitsquantentheorie. Mathematische Grundlagen der Werttheorie. Frankfurt a.M.

Quaas, Georg (2010): Realgrößen und Preisindizes im alten und im neuen VGR-System. URL: http://mpra.ub.uni-muenchen.de/22316/

Smith, Adam (1910): The Wealth of Nations. New York, Toronto, Nachdruck 1991.

Sraffa, Piero (1967): Warenproduktion mittels Waren. Frankfurt a.M.