



Munich Personal RePEc Archive

## **Kinetic theory of fluctuations of the parameters of a production line**

, and , and ,

National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute",  
Karazin Kharkiv National University, Karazin Kharkiv National  
University

1 December 2014

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/93991/>

MPRA Paper No. 93991, posted 21 May 2019 04:32 UTC

### Кинетическая теория колебаний параметров поточной линии

Состояние равновесных производственных процессов может быть описано моделями теории очередей (TQ-model) [1], моделями жидкости (Fluid-model) [2] и дискретно-событийными моделями (DES-model) [3]. Каждый тип моделей имеет широкое применение, но ни один из них в полной мере не позволяет провести исследование характерных для современного поточного производства неравновесных переходных режимов функционирования производственной линии [4]. Использование TQ-моделей для описания переходных процессов приводит к чрезмерному усложнению задачи [1], DES-модели требуют больших затрат машинного времени, Fluid-модели ориентированы на малое количество интервалов обобщения технологического маршрута и линейные стационарные решения [5].

В последнее десятилетие для проектирования поточных линий используются модели, содержащие уравнения в частных производных (PDE-model) [6-9]. Введенный класс моделей расширил возможности проектирования систем управления поточными линиями, позволил перейти к детальному исследованию колебаний ее параметров. Известно, что поточная линия в неравновесном состоянии характеризуется тем, что в ней из-за наличия пространственной неоднородности плотности распределения предметов труда по состояниям и асинхронной работы технологического оборудования, размещенного вдоль технологического маршрута, постоянно существуют колебания параметров [8]. Амплитуда колебаний определяет размер емкости межоперационных накопителей, необходимых для обеспечения бесперебойной работы поточной линии. Колебания параметров тесно связаны со стохастическим характером взаимодействия предметов труда и производственного оборудования. Статистическое описание состояния предметов труда, находящихся в процессе технологической обработки, осуществляется функцией распределения  $\chi(t, S, \mu)$  в фазовом технологическом пространстве  $(S, \mu)$  [9,10]. Обобщенная координата  $S \in [0, S_d]$  (грн.) определяет степень готовности изделия [9,10], соответствует стоимости технологических ресурсов, перенесенных на предмет труда с себестоимостью  $S_d$ . Обобщенная координата  $\mu$  (грн./час) характеризует интенсивность переноса технологических ресурсов на предмет труда. Кинетическое уравнение [9,10] для функции распределения  $\chi = \chi(t, S, \mu)$

$$\frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial t} + \frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial S} \mu + \frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial \mu} f(t, S) =$$

$$= \lambda_p(t, S) \left\{ \int_0^\infty [\varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu) \tilde{\mu} \chi(t, S, \tilde{\mu})] d\tilde{\mu} - \mu \chi(t, S, \mu) \right\}; \quad (1)$$

$$f(t, S) = \frac{[\chi]_{1\psi}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)} \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{[\chi]_{1\psi}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)} \right); \quad \int_0^\infty \varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu) d\mu = 1; \quad \int_0^\infty \chi(t, S, \mu) d\mu = [\chi]_0(t, S).$$

описывает движение предметов труда плотностью  $[\chi]_0(t, S)$  по технологическому маршруту с темпом их обработки  $[\chi]_{1\psi}(t, S)$  на оборудовании, расположенном с плотностью  $\lambda_p = \lambda_p(t, S)$  по технологическому маршруту. Функции  $\varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu)$  определяет вероятность перехода предмета труда из состояния  $(S, \tilde{\mu})$  в состояние  $(S, \mu)$  в результате воздействия оборудования.

Кинетическое уравнение (1) является нелинейным. Если допускается колебание потоковых параметров технологической линии с малой амплитудой, то  $\chi(t, S, \mu)$  можно линеаризовать:

$$\chi(t, S, \mu) = \chi_0(t, S, \mu) + \chi_1(t, S, \mu), \quad \chi_0(t, S, \mu) \gg \chi_1(t, S, \mu) \quad (2)$$

где  $\chi_1 = \chi_1(t, S, \mu)$  - малое отклонение функции от установившегося равновесного невозмущенного состояния  $\chi_0 = \chi_0(t, S, \mu)$ . Будем полагать, что состояние предмета труда после воздействия оборудования не зависит от его состояния  $\tilde{\mu}$  до воздействия оборудования (1), т.е.  $\varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu) = \varphi_0(t, S, \mu)$ .

Для работающих в равновесном состоянии поточных линий с высокой концентрацией оборудования по технологическому маршруту  $\lambda_p(t, S) \cdot S_d \gg 1$  кинетическое уравнений (1) имеет вид

$$\varphi_0(t, S, \mu) \cdot [\chi]_{1\psi} - \mu \cdot \chi_0(t, S, \mu) = 0; \quad f_0(t, S) = \frac{[\chi]_{1\psi}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)} \cdot \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{[\chi]_{1\psi}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)} \right);$$

$$\frac{\partial \chi_0(t, S, \mu)}{\partial t} + \frac{\partial \chi_0(t, S, \mu)}{\partial S} \mu + \frac{\partial \chi_0(t, S, \mu)}{\partial \mu} f_0(t, S) = 0; \quad \int_0^\infty \chi_0(t, S, \mu) d\mu = [\chi]_0(t, S), \quad (3)$$

где  $\varphi_0(t, S, \mu)$  представлена функцией вида [11, с.16]:

$$\varphi_0(t, S, \mu) = \frac{\beta^\nu \cdot \mu^{\nu-1} \cdot e^{-\beta\mu}}{\Gamma(\nu)}, \quad \Gamma(\nu) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{\nu-1} dt, \quad \nu > 2, \quad \beta > 0. \quad (4)$$

С учетом (4) для установившегося равновесного режима

$$\chi_0 = [\chi]_{1\psi} \frac{\beta^\nu \mu^{\nu-2} e^{-\beta\mu}}{\Gamma(\nu)}, \quad B = \frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0} = \frac{\nu}{\beta}, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \chi_0(\mu) = 0, \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \chi_0(\mu) = 0. \quad (5)$$

В ходе технологической обработки перед  $m$ -ым оборудованием образуется межоперационный технологический задел в виде очереди

$N_m = \int_{S_{m-1}}^{S_m} [\chi]_0(t, S) dS$  предметов труда [12, с.909-911]. Изменение плотности

$[\chi]_0(t, S)$  в кинетическом уравнении (1) приводит к изменению функции распределения предметов труда по состояниям  $\chi(t, S, \mu)$ , что вызывает

изменение плотности предметов труда  $[\chi]_0(t, S)$  и, следовательно, изменение длины очереди  $N_m$ . Колебания длины очереди  $N_m$  приводит к колебаниям функции распределения  $\chi(t, S, \mu)$ , и наоборот.

Рассмотрим колебания потоковых параметров производственной линии для распространенного случая синхронизации технологического оборудования [7-9]. При синхронизированном режиме работы поточной линии среднее время обработки предмета труда на каждой технологической операции одинаково, откуда следует

$$\frac{\partial[\chi]_{1\psi}(t, S)}{\partial S} = 0. \quad (6)$$

Для одномоментного описания [9,10]

$$\frac{\partial[\chi]_0(t, S)}{\partial t} + \frac{\partial[\chi]_{1\psi}(t, S)}{\partial S} = 0 \quad (7)$$

из условия синхронизации оборудования (6) следует  $\frac{\partial[\chi]_0(t, S)}{\partial t} = 0$ . Так как

плотность межоперационных заделов для синхронизированной линии не меняется со временем, то поместив часть предметов труда в межоперационные страховые накопители, можно начальное распределение предметов труда вдоль технологического маршрута представить в виде равномерного распределения плотности  $\frac{\partial[\chi]_0(0, S)}{\partial S} = 0$ . С учетом (4)-(7)

кинетическое уравнение (1) линеаризуем в окрестности установившегося равновесного невозмущенного состояния  $\chi_0 = \chi_0(t, S, \mu)$  (2)

$$\frac{\partial\chi_1}{\partial t} + \frac{\partial\chi_1}{\partial S} \mu - \frac{\partial\chi_0}{\partial\mu} B^3 \frac{1}{[\chi]_{1\psi}} \frac{\partial[y]_0}{\partial S} = -\lambda_p \mu \chi_1, \quad \int_0^{\infty} \chi_1 d\mu = [y]_0. \quad (8)$$

Поскольку (8) линейно и не содержит координат в явном виде, то искомые функции  $\chi_1 = \chi_1(t, S, \mu)$  и  $[y]_0 = [y]_0(t, S)$  разложим на интервале  $[0, S_d]$  в ряд Фурье по координате S. Решения уравнения (8) будем искать в виде  $\chi_{1j}(t, \mu) e^{ik_j S}$ ,  $[y_j]_0(t) e^{ik_j S}$ ,  $k_j = (2\pi j)/S_d$ . Тогда из (8) следует

$$\frac{\partial\chi_{1j}}{\partial t} + (ik_j + \lambda_p) \chi_{1j} \mu - \frac{\partial\chi_0}{\partial\mu} B^3 \frac{1}{[\chi]_{1\psi}} ik_j [y_j]_0(t) = 0, \quad \int_0^{\infty} \chi_{1j}(t, \mu) d\mu = [y_j]_0(t). \quad (9)$$

Для решения уравнения (9) воспользуемся Фурье преобразованием

$$\begin{aligned} \chi_{1j}(t, \mu) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+\sigma}^{\infty+\sigma} e^{-i\omega t} \cdot \chi_{1j\omega}(\mu) d\omega, & \chi_{1j\omega}(\mu) &= \int_0^{\infty} e^{i\omega t} \cdot \chi_{1j}(t, \mu) dt, \\ [y_j]_0(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+\sigma}^{\infty+\sigma} e^{-i\omega t} \cdot [y_{j\omega}]_0 d\omega, & [y_{j\omega}]_0 &= \int_0^{\infty} e^{i\omega t} \cdot [y_j]_0(t) dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Умножим слагаемые кинетического уравнения (9) на  $e^{i\omega t}$  и проинтегрируем по времени t. Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} \frac{\partial \chi_{1j}(t, \mu)}{\partial t} e^{i\omega t} dt = -\chi_{1j}(0, \mu) - i\omega \chi_{1j\omega}(\mu); \\
& \int_0^{\infty} \frac{\partial \chi_0}{\partial \mu} \frac{B^3}{[\chi]_{1\nu}} ik_j [y_j]_0(t) e^{i\omega t} dt = \frac{\partial \chi_0}{\partial \mu} \frac{B^3}{[\chi]_{1\nu}} ik_j [y_{j\omega}]_0; \\
& \int_0^{\infty} (ik_j + \lambda_p) \chi_{1j}(t, \mu) \mu e^{i\omega t} dt = (ik_j + \lambda_p) \mu \chi_{1\omega}(\mu),
\end{aligned} \tag{11}$$

получим

$$\chi_{1j\omega}(\mu) = \frac{\chi_{1j}(0, \mu) + \frac{\partial \chi_0}{\partial \mu} \frac{B^3}{[\chi]_{1\nu}} ik_j [y_{j\omega}]_0}{i(k_j \mu - \omega) + \lambda_p \mu}. \tag{12}$$

Выражение (9) позволяет записать соотношение

$$\int_0^{\infty} \chi_{1j\omega}(\mu) d\mu = [y_{j\omega}]_0. \tag{13}$$

Подставив (12) в (13), находим

$$[y_{k\omega}]_0 = \frac{1}{(ik_j + \lambda_p) - B^3 \frac{ik_j}{[\chi]_{1\nu}} \int_0^{\infty} \frac{\partial \chi_0}{\partial \mu} \frac{d\mu}{\left(\mu - \frac{p}{\beta}\right)}} \int_0^{\infty} \frac{\chi_{1j}(0, \mu)}{\left(\mu - \frac{p}{\beta}\right)} d\mu, \quad p = \beta \frac{\omega(k_j + i\lambda_p)}{k_j^2 + \lambda_p^2} \tag{14}$$

Используя (5), получим:

$$\frac{\partial \chi_0(\mu)}{\partial \mu} = \left( \frac{(\nu - 2)}{\mu} - \beta \right) \chi_0(\mu). \tag{15}$$

Принимая во внимание, что [13, с.252]

$$\frac{1}{[\chi]_{1\nu}} \int_0^{\infty} \frac{\partial \chi_0(\mu)}{\partial \mu} \frac{d\mu}{\left(\mu - \frac{p}{\beta}\right)} = -\beta^3 ((\nu - 2) - p) \frac{p^{\nu-3} e^{-p}}{\Gamma(\nu)} \ln p, \tag{16}$$

равенство (14) запишем в виде

$$[y_{k\omega}]_0 = \frac{1}{(ik_j + \lambda_p) + \nu^3 ik_j ((\nu - 2) - p) \frac{p^{\nu-3} e^{-p}}{\Gamma(\nu)} \ln p} \int_0^{\infty} \frac{\chi_{1j}(0, \mu)}{\left(\mu - \frac{p}{\beta}\right)} d\mu \tag{17}$$

Применим к (12), (17) обратное преобразование Фурье, найдем искомые функции  $\chi_1(t, S, \mu)$ ,  $[y]_0(t, S)$ . Однако, уже общие формулы (12), (17) позволяют исследовать поведение функций  $\chi_{1j}(t, \mu)$  и  $[y_j]_0(t)$  с ростом  $t$ . Асимптотическое поведение функций при больших  $t$  определяется характером особенностей преобразования Лапласа. Функция  $\chi_{1j\omega}(\mu)$  имеет такие же особенности, что и  $[y_{k\omega}]_0$ , и добавочный полюс  $\mu\beta = p$ . Рассмотрим вопрос об особенностях функции  $[y_{k\omega}]_0$ . Будем полагать, что функция  $\chi_{1j}(0, \mu)$ , задающая начальное возмущение, не имеет особенностей при

конечных значениях  $\mu$ . Тогда асимптотика интеграла (17) при больших  $t$  задается нулями уравнения

$$(ik_j + \lambda_p) + v^3 ik_j ((v-2) - p) \frac{p^{v-3} e^{-p}}{\Gamma(v)} \ln p = 0. \quad (18)$$

Для синхронизированной поточной линии  $\tau_1 \approx \tau_2 \approx \dots \approx \tau_m \approx \dots \approx \tau_M \approx \tau_0$  ( $N \gg M$ ), что позволяет длительность производственного цикла для обработки партии  $N$ -деталей на  $M$ -операциях представить выражением

$$T_d \approx \sum_{m=1}^M \tau_m + \tau_M \cdot (N-1) \approx \tau_0 \cdot N. \quad (19)$$

Введем  $\omega_d = 2\pi/T_d$  и  $\omega_0 = 2\pi/\tau_0 = 2\pi \cdot [\chi]_{1v}$ , ограничивающие интересный для теоретических и практических исследований диапазон частот колебаний  $\omega$  потоковых параметров, ( $\omega_d \leq \omega \leq \omega_0$ ). При изучении поточной линии рассмотрим колебания, период которых больше времени выполнения технологической операции  $\tau_0$  и не превышает длительность производственного цикла  $1 \leq \left| \frac{\omega}{\omega_d} \right| \ll \frac{T_d}{\tau_0}$ . При этом предполагаем, что длина волны колебаний потоковых параметров  $\gamma_j = \frac{2\pi}{k_j}$  исследуемой линии превышает усредненную протяженность участка технологического маршрута, ограниченного одной технологической операцией и меньше протяженности всего технологического маршрута  $S_d$ :  $S_d/M = 1/\lambda_p \ll \gamma_j \leq S_d$ .

Уравнение (18), определяющее зависимость между  $\omega$  и  $k_j$ , является дисперсионным уравнением поточной линии. Используя обозначение

$$\varepsilon = \frac{k_j}{\lambda_p} = \frac{2\pi j}{S_d \lambda_p} = \frac{2\pi j}{M} \ll 2\pi, \quad [\chi_0]_0 S_d = N, \quad \lambda_p S_d = M. \quad (20)$$

дисперсионное уравнение поточной линии (18) представим в виде соотношения безразмерных параметров  $\varepsilon = \frac{k_j}{\lambda_p}$  и  $\omega/\omega_d$

$$D\left(\varepsilon, \frac{\omega}{\omega_d}\right) = 1 + i\varepsilon \left( 1 + v^3 (v-2-p) \frac{p^{v-3} e^{-p}}{\Gamma(v)} \ln p \right) = 0, \quad p = \frac{2\pi \cdot v}{M} \frac{\omega}{\omega_d} \frac{(\varepsilon + i)}{(\varepsilon^2 + 1)}. \quad (21)$$

Пусть  $\omega_k/\omega_d$  является ближайшим к вещественной оси корень из множества корней дисперсионного уравнения  $D\left(\varepsilon, \frac{\omega}{\omega_d}\right)$ , обладающий меньшей по величине мнимой частью  $\text{Im}(\omega/\omega_d) > 0$ . Тогда в интеграле выражения (17) будет существен при больших  $t$  только вычет относительно полюса  $\omega_k$ . Остальные части интеграла экспоненциально малы из-за

наличия в подынтегральном выражении множителя  $\exp(-i\omega \cdot t)$ . Асимптотический закон убывания  $[y_j]_0(t)$  дается выражением

$$[y_j]_0(t) \approx \exp(-i \operatorname{Re} \omega_k t) \cdot \exp(-\operatorname{Im} \omega_k t). \quad (22)$$

Таким образом, с течением времени возмущения плотности  $[\chi]_0(t, S)$  затухают экспоненциально с декрементом  $\operatorname{Im} \omega_k$ . На рис.1 представлено численное решение дисперсионного уравнения (21) для диапазона значений  $\varepsilon \in [0.01..3.0]$  ( $\nu=3$ ). С увеличением количества  $M$  технологического оборудования (операций) параметр  $\varepsilon$  уменьшается, что влечет за собой уменьшение характерного времени затухания возмущений  $\tau \approx T_d \operatorname{Im} \left( \frac{\omega}{\omega_d} \right)^{-1}$ .

Оценим характерное время затухания возмущения плотности  $[\chi]_0(t, S)$  для поточной линии Intel, содержащей  $M=200$  технологических операций при длительности производственного цикла  $T_d=8..12$  недель [8]. Для  $\varepsilon = \left( \frac{2\pi}{200} \right) = 0,0314$  ( $\nu=3$ ) с использованием результатов численных расчетов (рис.1) определяем теоретическое характерное время затухания  $\tau \approx 1..2$  недели. Наблюдения, полученные с производственных линий ( $M=200..400$ ,

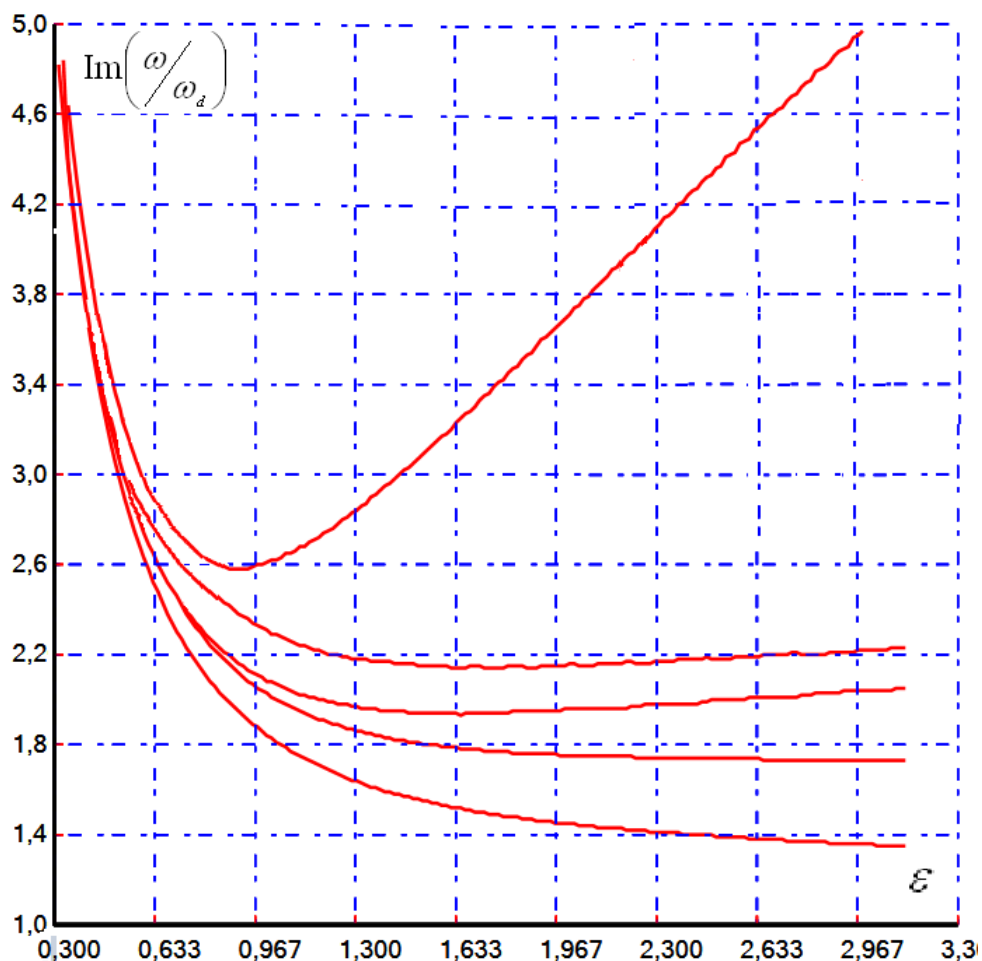


Рис.1.  $\operatorname{Im}(\omega/\omega_d) = f(\varepsilon)$  для производственной линии,  $\nu=3$

$v=3$ ,  $\varepsilon=0.02..0.04$ ) по изготовлению полупроводниковой продукции Intel подтверждают численные расчеты для времени затухания колебаний плотности  $[\chi]_0(t, S)$  [14]. Экспериментальные данные [14, с.445] свидетельствуют о том, что на производственной линии периодически возникают возмущения потоковых параметров продолжительностью до  $\tau \approx 1..2$  недели при производственном цикле  $T_d=8..12$  недель,

В заключении остановимся на свойствах функции распределения  $\chi(t, S, \mu)$ . Искомая функция получается подстановкой (12) в (10). Помимо полюсов, происходящих от  $[y_{k\omega}]_0$ , подынтегральное выражение имеет полюс в точке  $i(k_j\mu - \omega) + \lambda_p\mu = 0$ . По вычету в нем находим

$$\chi_{1j}(t, \mu) \approx \exp(-\lambda_p\mu t). \quad (23)$$

Возмущение функции распределения затухает со временем.

Функция  $\chi_1(t, S, \mu) \approx \exp(ik_j S - ik_j\mu t - \lambda_p\mu t)$  является решением кинетического уравнения

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial t} + \frac{\partial \chi_1}{\partial S} \mu = -\lambda_p \mu \chi_1, \quad (30)$$

при начальном распределении  $\chi_{1j}(0, \mu) \exp(ik_j S)$  с характерным временем затухания возмущений  $\langle \tau \rangle \approx (\lambda_p \langle \mu \rangle)^{-1} \approx \frac{T_d}{M}$  функции распределения  $\chi(t, S, \mu)$ . Для производственного цикла  $T_d=8..12$  недель [14, с.445] период затухания составляет  $\langle \tau \rangle \approx 0.1$  недели.

### Выводы.

Для синхронизированной производственной линии теоретически обосновано затухание возмущений потоковых параметров. Получено и численно решено дисперсионное уравнение для потоковых параметров производственной линии. Показано, что для синхронизированных производственных линий ( $v=3, \varepsilon=0.2..0.4$ ) при большом количестве технологических операций ( $M=40..400$ ) и предметов труда ( $N \approx 10^4$  шт., [8]), распределенных вдоль технологического маршрута, характерное время существования малых возмущений плотности  $[\chi]_0(t, S)$  и функции распределения  $\chi(t, S, \mu)$  составляет соответственно  $\tau \approx 1..2$  недели и  $\langle \tau \rangle \approx 0.1$  недели для производственного цикла  $T_d=8..12$  недель [14, с.445]. Колебания возникают неизбежно и являются затухающими

1. Gross D. Fundamentals of Queueing Theory. – New York: Wiley, 1985. – 587 p.

2. Harrison J. Brownian Motion and Stochastic Flow Systems. – New York: Wiley, 1985. – 142 p.



3. Ramadge P. The control of discrete event systems. // Proceedings of the IEEE – 1989. – vol. 77, №1. – P. 81 – 98.
4. Berg R. Partial differential equations in modelling and control of manufacturing systems”. – Eindhoven: Eindhoven University of Technology, 2004. – 157 p.
5. Armbruster D. The production planning problem Clearing functions, variable leads times, delay equations and partial differential equations. Decision Policies for Production Networks – London: Springer-Verlag London, 2012. – P. 289 – 303.
6. Lefeber E. Berg R., Rooda J. Modeling, Validation and Control of Manufacturing Systems. Paper presented at the Proceeding of the 2004 American Control Conference, Boston, Massachusetts, 2004. – P. 4583 – 4588.
7. Berg R., Lefeber E., Rooda J. Modelling and Control of a Manufacturing Flow Line using Partial Differential Equations. Paper presented at the IEEE Transactions on Control Systems Technology, Boston, 2008. – P. 130 – 136.
8. Armbruster D., Ringhofer C., Jo T- J. Continuous models for production flows. Paper presented at the 2004 American Control Conference, Boston, Massachusetts, 2004. – P. 4589 – 4594.
9. Пигнастый О. М. Статистическая теория производственных систем. – Харьков.: Изд. ХНУ им. Каразина, 2007. – 388 с.
10. Armbruster D., Marthaler D., Ringhofer C. Kinetic and fluid model hierarchies for supply chains supporting policy attributes // Bulletin of the Institute of Mathematics. – 2006. №2 – P. 433 – 460.
11. Zhang L. System-theoretic properties of Production Lines. PhD dissertation. The University of Michigan, Michigan, 2009. – P. 289.
12. Armbruster D. Degond P., Ringhofer C. A model for the dynamics of large queuing networks and supply chains. // Journal on Applied Mathematics. – 2006. –№ 83. – P. 896–920.
13. Евграфов М.А., Бежанов К.А., Сидоров Ю.В., Федорюк М.В, Шабунин М.И Сборник задач по теории аналитических функций. – Москва.: Наука, 1972. – С. 416.
14. Tian F., Willems S., Kempf K. An iterative approach to item-level tactical production and inventory planning. // International Journal of Production Economics, 2011. – №133. – P. 439 – 450 .