

# MPRA

Munich Personal RePEc Archive

## Using PDE-models for a unified theory of production lines

,

"" , ,

6 September 2014

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/94647/>

MPRA Paper No. 94647, posted 23 Jun 2019 10:55 UTC

## Использование PDE-моделей для построения единой теории производственных линий

В статье обсуждается введенный автором (2003 г.) [1] класс моделей производственных систем с поточным способом организации производства, широко используемый в настоящее время для построения эффективных систем управления производственными линиями [2,3]. Модели класса, определяющие поведение параметров производственной линии с помощью уравнений в частных производных, получили название PDE-моделей производственных систем [2-4], в последнее десятилетие успешно использованы для описания квазистатических, так и некоторых неустойчивых переходных процессов [5].

**Ключевые слова:** PDE-модель, производственная линия, массовое производство, незавершенное производство, система управления, балансовые уравнения, производственной линии, уравнение состояния, дискретно-событийная модель, теория массового обслуживания, модель жидкости, Clearing- функция, квазистатический процесс, переходный процесс, стохастический процесс

О.М.Pihnastyi

National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"

### Using PDE-models for a unified theory of production lines

This paper discusses a class of models of production systems [1]. Models are widely used today for building effective systems of production lines [2,3]. Class model parameters determine the behavior of the production line with the help of partial differential equations (PDE-model) [2-4], in the last decade successfully used to describe the quasi-static and transient transients [5].

**Keywords:** PDE-model, production line, mass production, work in progress, management system, balance equations of the production line, equation of state, discrete-event model, queuing theory, model fluid, Clearing-function, quasi-static process, transient process, stochastic process

### Введение

Характерной чертой развития современного промышленного производства является то, что длительность цикла производства занимает существенную часть жизненного цикла изделия. При длительности производственного цикла в несколько месяцев для предприятий, например, с поточным методом организации производства полупроводниковой продукции жизненный цикл изделий не превышает одного года [5]. Это приводит к тому, что производственные линии значительную часть времени функционирует в переходном неустойчивом режиме. В связи с этим при проектировании систем управления производственными линиями в последнее десятилетие особо актуальной стала задача построения моделей управления для переходных неустойчивых режимов производства. Актуальность задачи настолько высока, что ведущие мировые предприятия (Intel [5]) создали экспериментальные лаборатории по исследованию переходных неустойчивых режимов. Процесс управления современным многопоточным производством усложняется тем, что производственные линии предприятий являются многономенклатурными, состоят из значительного количества технологических операций, использующих для обработки изделий множество разных видов технологических ресурсов, содержат в незавершенном производстве большое число распределенных вдоль технологического маршрута предметов труда (Табл.№1). Технологические маршруты изделий разных номенклатур пересекаются, используют для

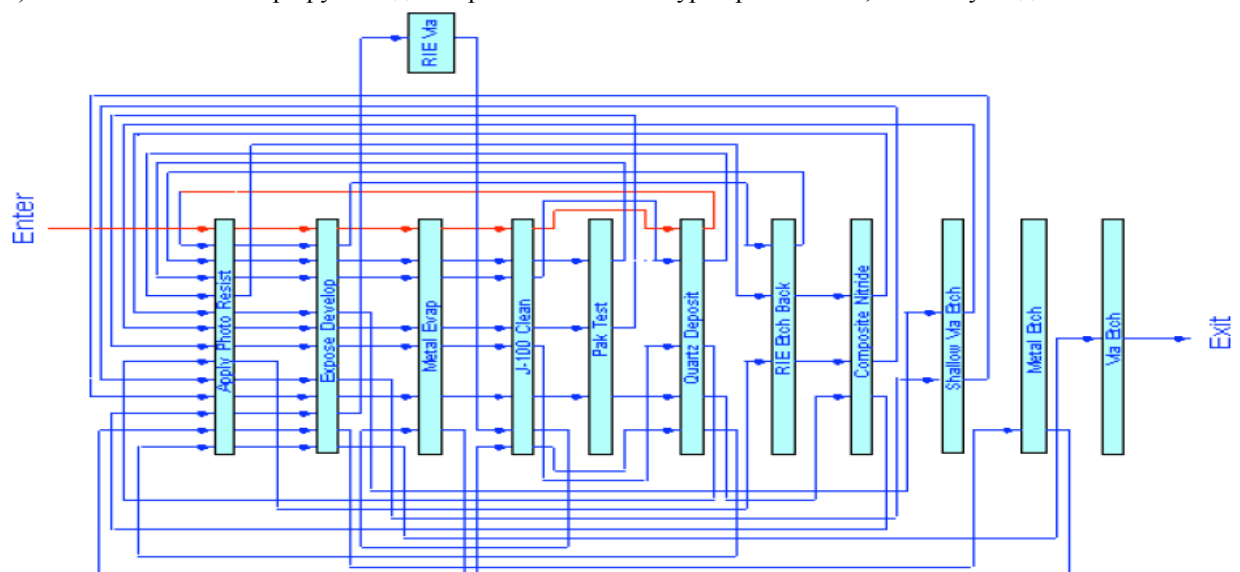


Рис.1. Структура производственной линии по изготовлению полупроводниковой продукции [6]

Таблица №1. Основные параметры производственных линий

Наименование параметра	значение	источник
Кол-во техн. операций, единиц техн. оборудования	M=150..1500 шт.	[5,с.4589]
Кол-во изделий в незавершенном производстве	N=10 <sup>4</sup> .. 10 <sup>5</sup> шт.	[7,с.242]
Кол-во производимых номенклатур изделий	K=1..10 шт.	[8,с.940]
Продолжительность жизненного цикла изделий	12 мес.	[5,с.4589]
Длительность производственного цикла	T <sub>d</sub> =3..6 мес.	[5,с.4589]
Время принятия управленческого решения	0,5..1.0 час	[9,с.7]

выполнения технологических операций используется одно и то же оборудование, требуя расстановки приоритетов обработки и потребления ресурсов.

Дальнейшее развития теории систем управления потоковыми параметрами производственных линий для неустановившихся переходных режимов привело к тому, что в последнее десятилетие были разработаны качественно новые типы моделей, сочетающие самосогласованные предметно-технологическое на микроуровне и потоковое на макроуровне описания производственной линии [1]. Опыт построения моделей физических систем, состоящих из множества объектов, подсказывает, что дальнейшее развитие теории моделей производственных систем может быть основано на статистическом подходе [10,11], фундаментом которого является механизм стохастического воздействия оборудования на предмет труда и коллективного взаимодействия предметов труда между собой, и феноменологическом, позволяющем установить основные закономерности технологических явлений [2–5] на основе наблюдений и статистики без использования модельных представлений [1,11] о характере взаимодействия предметов труда и оборудования. Общие закономерности большинства установившихся технологических процессов известны. Разным технологическим процессам соответствуют разные уравнения состояния [2–5]. Определенные с помощью обработки статистических данных уравнения состояния являются фундаментом феноменологического подхода построения квазистатических моделей производственных линий. Однако, представление переходного неустановившегося производственного процесса последовательной цепочкой квазистатических равновесных уравнений состояния [2–5] приводит к значительной погрешности. В общем виде уравнения состояний могут быть получены в рамках статистического похода, который позволяет однозначно связать макроскопические потоковые характеристики технологического процесса с микроскопическими предметно-технологическими параметрами достаточно большого количества предметов труда [1,11].

Цель исследования настоящей статьи - обосновать концептуальные положения и теоретические основы построения континуальных моделей производственных линий для переходных и установившихся режимов.

### Построение единой теории производственных линий

Наличие однообразных задач планирования и управления производством привело исследователей к идее создания единой теории производственных систем. Graves S.C.(1986) [12], Karmarkar U.S.(1989) [13] предложили использовать в качестве основных параметров состояния производственных линий (рис.2) объем незавершенного производства (WIP: work in process)  $W$ , пропускную способность (capacity, throughput)  $[\chi]_1$  и длительность производственного цикла (lead time)  $T_d$ . Корректно определенное Karmarkar U.S. (1989) [13] уравнение состояния производственной линии  $[\chi]_1 = \Phi(W)$ , получившее название clearing-функции, задавало для устойчивых установившихся производственных процессов мгновенную связь между пропускной способностью  $[\chi]_1$ , производственным циклом  $T_d$  и объемом незавершенного производства  $W$  (рис.3). Для вывода уравнение состояния использовалось множество



Рис.2.Основные параметры производственных линий

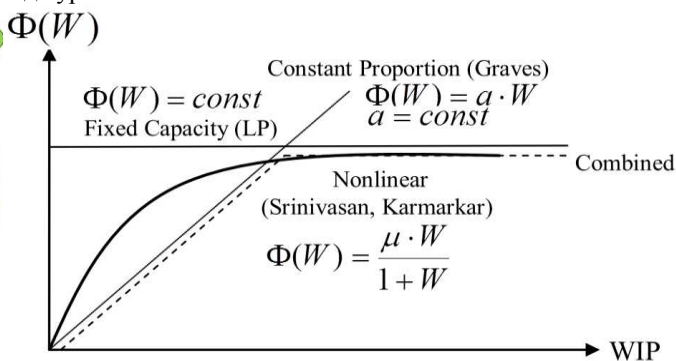


Рис.3. Clearing-функция производственной системы (Karmarkar U.S., 1989), [13]

моделей, из которых следует выделить основные типы моделей и их комбинации: модели массового обслуживания (TQ-model) [14], дискретно-событийные модели (DES-model) [15], модели жидкости (fluid-model) [16] (рис.3). Каждый тип имеет преимущества, но ни один не подходил в полной мере для моделирования как установившихся, так и переходных процессов работы производственной системы [2–4,8].

Модели теории массового обслуживания (TQ-model) (рис.4) используются для описания производственных линий в установившемся режиме [14]. Применение TQ-моделей для переходных режимов приводит к чрезмерному усложнению задачи. Существенным ограничением их применения является то, что современные производственные линии состоят из большого числа технологических операций. Как правило, используются одномоментные модели теории массового обслуживания. Двухмоментные модели теории массового обслуживания, учитывающие дисперсию параметров обработки предметов труда, для описания производственных линий практически не встречаются в связи их сложностью построения. Следующим ограничением для применения TQ-model является то обстоятельство, что основные формулы получены для установившихся режимов ( $t \rightarrow \infty$ ), что автоматически подразумевает выполнение неравенства  $\lambda < \mu$  (рис.4.), где  $\lambda$  - интенсивность поступления предметов труда на обработку;  $\mu$  - интенсивность обработки предметов труда. В действительности, большинства производственных линий с конечным производственным циклом справедливо неравенство  $\lambda \geq \mu$ , что не позволяет использовать хорошо разработанный аппарат теории массового обслуживания для установившихся процессов. Решение указанных проблем приводит к высокой размерности задачи, громоздким вычислениям, требует значительных вычислительных ресурсов.

Дискретно-событийные модели (DES-модели) удачно применены для описания работы поточных линий в переходном и стационарном режиме, содержащих малое количество технологических операций и обрабатывающих партии предметов труда небольших размеров. Требуемое процессорное время для расчета параметров производственной линии для партии деталей  $N=10^4.. 10^5$  шт. и 100 технологических операций при миллионе имитаций [7,с.242] составляет несколько дней, что делает невозможным использования DES-модели при проектировании систем управления производственными линиями. Существенным ограничением использования DES-моделей является сложность построения аналитических зависимостей между входными и выходными данными производственной линии для указанного количества технологических операций и размера партии предметов труда. Значительные вычислительные ресурсы необходимы для реализации алгоритмов генерации случайных чисел с заданным законом распределения параметров обработки предмета труда. Особое внимание следует уделить вопросам устойчивости вычислительных схем.

Дискретные и непрерывные жидкостные модели производственных линий (Fluid-модели) ориентированы на малое количество технологических операций и линейные стационарные решения [16,17]. Основное применение нашли при изучении переходных режимов работы производственной линии. Повышение количества технологических операций приводит к увеличению размерности системы дифференциальных уравнений, что значительно усложняет вычисления. Основная сложность построения Fluid-моделей заключается в выводе уравнений состояния для параметров производственной линии [17]. В подавляющем большинстве случаев Fluid-модели представлены одномоментным уравнением переноса, дополненным квазистатическим уравнением состояния. В отличие от DES-моделей они менее пригодны для описания стохастических производственных процессов [7].

Предложенный Кармаркаром (Karmarkar U.S) механизм clearing-функций позволил упорядочить процесс описания производственных линий, выделив основные потоковые параметры, которые являются общими для разных типов моделей. Однако, clearing-функции унаследовали недостатки, которыми обладали существующие TQ-, DES-, Fluid-модели, положенные в основу их построения. Для устранения противоречий необходим новый тип моделей, который с одной стороны был бы лишен указанных недостатков, а с другой стороны обладал бы преимуществами используемых моделей.

### Развитие теории производственных линий

В последнее десятилетие для проектирования производственных линий разработаны модели, содержащие уравнения в частных производных (PDE-model). Введенный в [1] (2003) новый в класс моделей объединил преимущества TQ-моделей, DES-моделей и Fluid-моделей, что значительно расширило возможности проектирования систем управления производственными линиями. PDE-модели позволили учесть влияние внутренних факторов производства на пропускную способность поточной линии с учетом ограничений, которые определяются максимальной производительностью оборудования и емкостью накопителя [1-5]. Существенным преимуществом PDE-моделей является то, что они подробно позволили описать движение предметов труда от операции к операции, допускают решение в аналитическом виде и не требуют значительных вычислительных ресурсов. При построении PDE-моделей выделилось два подхода: статистический (Пигнастый О.М., Азаренков Н.А., Ходусов В.Д., Демуцкий В.П. [1,11]) и феноменологический (Armbruster D., Berg R.A., Lefebvre E., Ringhofer C., Rooda J., [2–5]). Основным уравнением PDE-модели при феноменологическом описании является уравнение сохранения количества предметов труда, находящихся в процессе технологической обработки

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = 0, \quad F(t, x) = \rho(t, x) \cdot v(t, x) \quad W(t) = \int_0^1 \rho(t, x) dx, \quad x \in [0, 1] \quad (1)$$

где  $x$  - технологическая позиция предмета труда в технологическом маршруте;  $\rho(t, x)$  - плотность расположения предметов труда по позициям в тех. маршруте;  $F(t, x)$  - поток предметов труда вдоль тех. маршрута в зависимости от позиции;  $W(t)$  - объем незавершенного производства;  $v(t, x)$  - скорость движения предметов труда вдоль технологического маршрута. Уравнение (1), записанное в обозначениях, введенных в работах [3-5], является незамкнутым. Замыкание уравнения (1) многими авторами обеспечено с помощью уравнения состояния (clearing-функций). Ниже представлен анализ основных PDE-моделей производственных линий.

Для описания синхронизированных конвейерных линий довольно часто используется PDE-модель, содержащая Graves-уравнение состояния  $v(t, x) = c = const$ :

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = 0, \quad F(t, x) = \rho(t, x) \cdot v(t, x) \quad v(t, x) = c = const \quad x \in [0, 1] \quad (2)$$

Модель (2) позволяет получить основные потоковые параметры конвейера, движение предметов труда на котором происходит с постоянной скоростью  $v(t, x)$ .

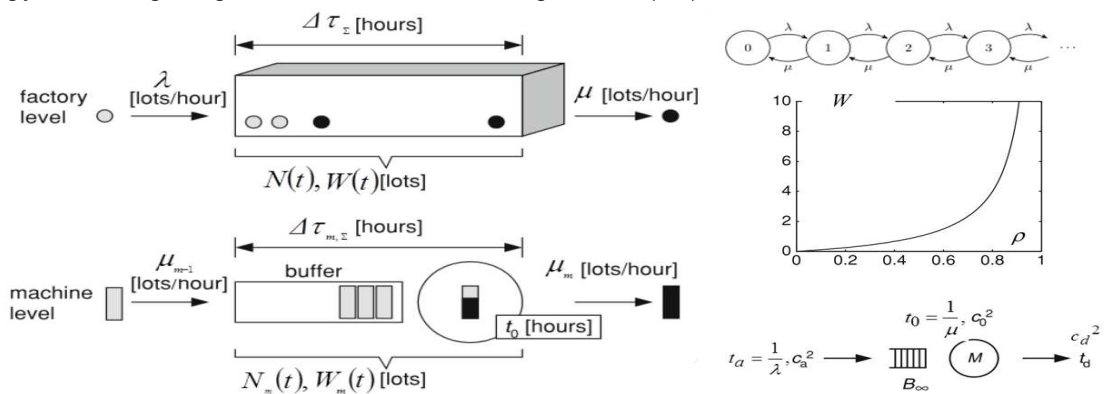


Рис.4. Базовые модели теории массового обслуживания

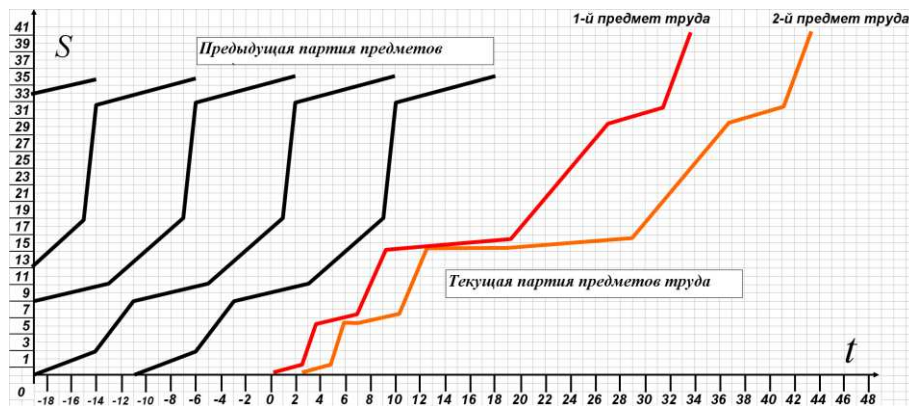


Рис.5. Базовые дискретно-событийные модели

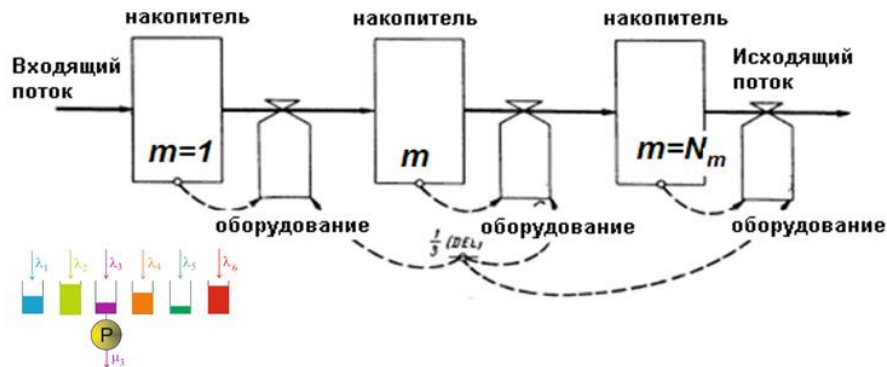


Рис.6. Концептуальное представление модели жидкости (Форрестер Дж., 1961[17])



Для описания производственных линий с ограниченной пропускной способностью удачно зарекомендовала себя нелинейная PDE-модель Lighthill–Whitham:

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = 0, \quad F(\rho(t, x)) = \rho(t, x) \cdot v(\rho(t, x)), \quad v(t, x) = v_0 \left(1 - \frac{\rho(t, x)}{R}\right), \quad v_0 = \text{const} \quad (3)$$

в которой пропускная способность ограничена максимальной плотностью межоперационных заделов  $R$ . При достижении плотности предметов труда в межоперационном заделе критического значения движение предметов труда по технологическому маршруту останавливается. LW PDE-модель (3) нашла широкое применение в задачах передачи трафика и при описании движущего потока автомобилей.

Заслуживает внимания квазистатическая PDE-модель, использующая нелинейное Karmarkar - уравнение состояния

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = 0, \quad F(t, x) = \rho(t, x) \cdot v(t, x), \quad v(t) = \frac{\mu}{M + W}, \quad (4)$$

где  $M$ -количество единиц технологического оборудования вдоль технологического маршрута,  $\mu$ -интенсивность обработки предмета труда,  $W$ -объем незавершенного производства. Скорость движения предметов труда  $v(t)$  в отличие от модели (2) является зависимой от времени. Модель используется для проектирования конвейерных линий с переменной скоростью движения. При увеличении количества предметов труда  $W$  в незавершенном производстве скорость конвейера снижается. PDE-модель (4) предложена Д.Армбрустером (Armbruster), получила дальнейшее развитие в работах Э.Лефедера (Lefebber):

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = 0, \quad F(t, x) = \rho(t, x) \cdot v(t, x) \quad v(t, x) = \frac{\mu}{M + \rho(t, x)} \quad (5)$$

Модель (5) учитывает в уравнении состояния для установившегося процесса зависимость распределения предметов труда по технологическим позициям. Увеличение количества предметов труда в межоперационном заделе приводит к снижению скорости обработки изделий. Шагом в развитии двухмоментных моделей стала предложенная Э.Лефедером (Lefebber) двухмоментная PDE-модель, в которой уравнение состояния заменено уравнением Бюргерса.

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = 0, \quad F(t, x) = \rho(t, x) \cdot v(t, x), \quad \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v(t, x)^2}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

Скорость движения предметов труда в двухмоментной PDE-модели (6) так же, как и в одномоментной PDE-модели (5) зависит технологической позиции обработки. Однако в отличие от (5) скорость движения предметов труда в модели (6) определяется не из уравнения состояния для установившегося процесса, а путем решения балансового уравнения Бюргерса. Для описания поведения производственных линий при наличии экспериментальных данных Д.Армбрустером (Armbruster) предложена диффузионная PDE-модель [5]

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = 0, \quad F(t, x) = C(t) \cdot \rho(t, x) - D(t) \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial x}, \quad (7)$$

в которой для расчета коэффициентов  $C(t)$  и  $D(t)$  использованы статистические данные, определяющие технологические траектории предметов труда (рис.7). Точность вычислительных результатов, полученных с использованием диффузионной PDE-модели определяется точностью имеющихся статистических данных. Одномоментная модель (7) успешно применяется для описания производственных линий с накопленной статистикой данных о процессе обработки предметов труда. Однако использование диффузионной PDE-модели для проектирования новых производственных линий не представляется возможным. Перспективы развития диффузионной модели тесно связаны с теорией подобия производственных систем [11]. Описанные выше модели используют при замыкании уравнение состояния для установившихся режимов работы производственной линии. Построение уравнений состояния для переходных неустановившихся режимов связано со значительными трудностями [2-5].

Использование автором статистического подхода позволило выразить параметры производственной линии выразить через состояния большого количества предметов труда и построить замкнутую многомоментную PDE-модель для переходных неустановившихся режимов (2003) [1]

$$\frac{\partial [\chi]_0(t, S)}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_1(t, S)}{\partial S} = \int_0^\infty G(t, S, \mu) d\mu, \quad k > 0, \quad \int_0^\infty \mu^k \chi(t, S, \mu) d\mu = [\chi]_k(t, S) \quad (8)$$

$$\frac{\partial [\chi]_k(t, S)}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_{k+1}(t, S)}{\partial S} + k \frac{[\chi]_{1\psi}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)} \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{[\chi]_{1\psi}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)} \right) [\chi]_{k-1}(t, S) = \int_0^\infty \mu^k G(t, S, \mu) d\mu$$

где  $S$ - технологическая позиция предмета труда в технологическом маршруте,  $S \in [0, S_d]$ ;  $[\chi]_0(t, S) = \rho(t, S)$  - плотность расположения предметов труда по позициям в тех. маршруте;

$[\chi]_1(t, S) = F(t, S)$  - поток предметов труда вдоль тех. маршрута в зависимости от позиции;  $\chi(t, S, \mu)$  функции распределения предметов труда по состояниям;  $[\chi]_{1\psi}(t, S)$  - темп обработки предметов труда вдоль тех. маршрута в зависимости от позиции  $S$ ;  $G(t, S, \mu)$  - функция, определяющая процесс переноса оборудованием технологических ресурсов на предмет труда [1]. Для производственной линии с количеством предметов труда в незавершенном производстве  $N \gg 1$  и большим количеством технологических операций (таблица №1) система уравнений (8) в двухмоментном приближении принимает вид [11]

$$\frac{\partial[\chi]_0(t, S)}{\partial t} + \frac{\partial[\chi]_1(t, S)}{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial[\chi]_1(t, S)}{\partial t} + \frac{[\chi]_{1\psi}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)} \frac{\partial[\chi]_1(t, S)}{\partial S} = ([\chi]_{1\psi}(t, S) - [\chi]_1(t, S)) \frac{\partial}{\partial S} \frac{[\chi]_{1\psi}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)}. \quad (9)$$

Замкнутая двухмоментная система уравнений (9) определяет поведение параметров производственной линии для переходных неустановившихся режимов. Для синхронизированной конвейерной производственной линии, работающей в установившемся режиме, система уравнений (9) упрощается [1]:

$$\frac{\partial[\chi]_0(t, S)}{\partial t} + \frac{\partial[\chi]_1(t, S)}{\partial S} = 0; \quad \frac{\partial[\chi]_1(t, S)}{\partial t} + v(t, S) \cdot \frac{\partial[\chi]_1(t, S)}{\partial S} = 0; \quad \frac{[\chi]_{1\psi}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)} = v(t, S) \quad (10)$$

принимает вид (6), а для одномоментного приближения (12):

$$\frac{\partial[\chi]_0(t, S)}{\partial t} + \frac{\partial[\chi]_1(t, S)}{\partial S} = 0; \quad [\chi]_1(t, S) = [\chi]_{1\psi}(t, S) \quad (12)$$

Для синхронизированной линии  $\mu = v(t, S) \cdot [\chi]_0(t, S)$ , откуда скорость движения предметов труда по технологическому маршруту выразим через интенсивность обработки предметов труда  $\mu$

$$v(t, x) = \frac{\mu}{\rho(t, x)}, \quad (13)$$

откуда получим систему уравнений (12) в форме (5). Если скорость движения предметов труда по технологическому маршруту представить усредненной величиной

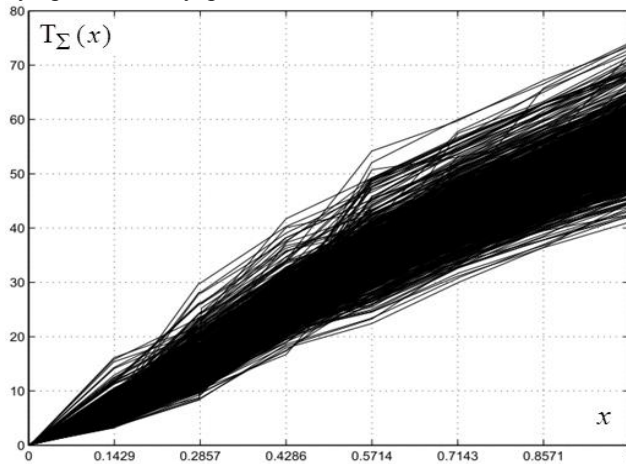


Рис.7. Траектории предметов труда, полученные для экспериментальной производственной линии INTEL [5]

$$V(t) = \frac{\int_0^{S_d} v(t, S) \cdot [\chi]_0(t, S) dS}{\int_0^{S_d} [\chi]_0(t, S) dS} = \frac{\mu(t)}{W(t)}, \quad S \in [0, S_d] \quad (14)$$

то система уравнений (12) может записана в форме (4).

Статистический подход позволяет обособовать существующие PDE-модели производственных линий для установившихся режимов и определить условия их применимости и построить новые для переходных, также построить модели для переходных режимов.

### Выводы

При построении нового типа моделей производственных линий использованы два подхода – феноменологический подход (Arnbruster D., Berg R.A., Lefebvre E., Ringhofer C., Rooda J.) и статистический (Пигнастый О.М., Азаренков Н.А, Ходусов В.Д., Демущкий В.П.). Феноменологический подход дал

возможность построить ряд моделей производственных линий, дополнив уравнения переноса, уравнением состояния в форме clearing-функции. Это позволило построить PDE-модели производственных линий для наиболее простых случаев функционирования. Обоснованность применения определялась сравнительным анализом результатов, полученных с помощью DES-модели и исследуемой PDE-моделью. Однако, хотя построенные PDE-модели с помощью феноменологического подхода и являются прогрессивными, дальнейшее их развитие ограничено. Ограничение обусловлено тем, что уравнения переноса и дополняющие их уравнения состояния для более сложных случаев не могут быть выведены из феноменологического представления. Для построения таких моделей необходимо использовать статистический подход. Показательно то, что общий характер статистических закономерностей не зависит от того, каким способом описывается поведение отдельного предмета труда. При весьма большом числе предметов труда появляются новые своеобразные статистические закономерности. Статистические закономерности обусловлены именно наличием большого числа предметов труда, ни в коем случае нельзя свести к закономерностям поведения отдельного элемента. Использование статистического подхода позволяет получить замкнутые многомоментные балансовые уравнения (уравнения переноса) не из феноменологических соображений, а исходя из законов движения отдельных предметов труда по технологическому маршруту, определенных технологией производства.

Дальнейшее развитие и использование PDE-моделей требует решения вопросов: 1. Вывод нестационарных уравнений состояния, основанных на детальной технологии обработки предмета труда с учетом схемы оборудования. 2. Построение многомоментных замкнутых балансовых моделей для установившихся и переходных нестационарных режимов функционирования производственной линии. 3. Построение двухуровневых моделей управления параметрами производственной линии для установившихся и переходных режимов с учетом параметров оборудования, схемы его расстановки и приоритетов движения предметов труда

### Литература

1. Демуцкий В.П. Теория предприятия: Устойчивость функционирования массового производства и продвижения продукции на рынок. / Демуцкий В. П., Пигнастая В. С., Пигнастый О. М. – Х.: ХНУ, 2003. – С. 272.
2. He F.L. Modeling and analysis of material flows in re-entrant Supply Chain Networks Using modified partial differential equations / F.L.He, M.Dong, X.F.Shao - Journal of Applied Mathematics, 2011. P. 14
3. Berg R.A. Modelling and Control of a Manufacturing Flow Line using Partial Differential Equations. IEEE Transaction on Control Systems Technology. / Berg R. A., Lefebvre E., Rooda J. E. – Boston, 2008. – P. 130 – 136.
4. Lefebvre E. Modeling, Validation and Control of Manufacturing Systems. / E.Lefebvre, R.A.Berg, J.E.Rooda – (Proceeding of the 2004 American Control Conference), Massachusetts, 2004. – P.4583 – 4588.
5. Armbruster D. Continuous models for production flows. In Proceedings of the 2004 American Control Conference. / Armbruster D., Ringhofer C., Jo T-J. – Boston, MA, USA, 2004. – P.4589 – 4594.
6. Bramson M. Stability of queueing networks, lecture notes in mathematics, Journal of Probability Surveys. / M. Bramson. – Netherlands, 2008. – Vol. 5. – P. 169 – 345.
7. Schmitz J.P. Chaos in Discrete Production Systems. / Schmitz J.P., Beek D.A., Rooda J.E. – Journal of Manufacturing Systems, 2002. – vol. 21, no. 3. – P. 236 – 246.
8. Kempf K. A Continuum Model for a Re-entrant Factory. Operations research. / K.Kempf, D.Marthaler, C.Ringhofer, D.Armbruster, J.Tae-Chang. – 2006. – Vol 54 – №5. – P. 933 - 950 .
9. Vollmann T.E. Manufacturing Planning and Control for Supply Chain Management. / T.E.Vollmann, L.Berry, D.C.Whybark, F.R.Jacobs – McGraw-Hill, New York, 2005. – P. 520.
10. Красовский А.А. Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем. / А. А. Красовский. – М.: Наука, 1974. – С.232.
11. Азаренков Н.А. К вопросу подобия технологических процессов производственно-технических систем / Н.А.Азаренков, О.М.Пигнастый, В.Д.Ходусов – Доповіді Національної академії наук України, 2011. -N02-C.29-35, <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/37227/>
12. Graves S.C. A tactical planning model for a job shop. Operations Research 34 (4). /S.C. Graves– New York, 1986. – P. 522 – 533.
13. Karmarkar U.S. Capacity Loading and Release Planning with Work-in-Progress (WIP) and Leadtimes. / U.S. Karmarkar.–Journal of Manufacturing and Operations Management 2, 1989. – P.105 – 123.
14. Gross D. Fundamentals of Queueing Theory. / D.Gross, C.M.Harris. – New York, 1974. – P. 490.
15. Ramadge P.J. The control of discrete event systems. Proceedings of IEEE. / P.J.Ramadge, W.M.Wonham. 1989. – v. 77(1). – P. 81 – 98.
16. Perturbation analysis for on-line control and optimization of stochastic fluid models /C.Cassandras ,Y.Wardi ,B.Melamed ,G.Sun ,C.Panayiotou IEEE Trans.Autom.Control.– Netherlands, 2002.vol. 47, №8. – P. 1234 – 1248.
17. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия. / Дж. Форрестер. – М.: Прогресс, 1961. – С. 341.