Evaluation of financial options: literature review and intuitive explanation of the calculus methods

Lahrech, Mohamed Taha and Benabdellah, Majid and Dehhaoui, Mohammed and Benchekroun, Fayçal

Institut Agronomique et Vétérinaire Hassan II

9 June 2018

Evaluation des options financières : revue de littérature et explication intuitive des méthodes de calcul

Mohamed Taha LAHRECH

Majid BENABDELLAH

Summary

This paper provides a qualitative explanation of the more common financial options pricing models, namely the Black-Scholes formula, Monte Carlo simulation and the binomial model. The first part is a general introduction to the concept and types of financial options. The second part discusses the variables that determine option prices and gives a conceptual view on the Brownian motion process as a mother-assumption of the aforementioned parametric methods. Finally, the article explains the logic of these three methods, in the purpose to share another way of understanding the valuation of financial options models from a qualitative perspective.

Key words : financial options, Brownian motion, Black-Scholes, binomial model, Monte Carlo.
Mots-clés : options financières, mouvement Brownien, Black-Scholes, modèle binomial, Monte Carlo.

Codes: A23, M20, G00.

ملخص

يقدم هذا المقال تفسيرا نوعيا لأهم طرق تقييم الخيارات المالية، وندكر بالخصوص صيغة بلاك شولز (Black-Scholes) والمحاكاة العددية مونتي كارلو (Monte Carlo simulation) والنموذج ذات الحدين (binomial model). الجزء الأول هو عبارة عن مقدمة عامة حول مفهوم وأنواع الخيارات المالية. أما الجزء الثاني، فيتطرق أولا إلى مناقشة المتغيرات التي تحدد سعر الخيار، ثم يعطي نظرة تصورية حول الحركة البراونية (Brownian motion) بكونها فرضية أساسية لبناء هذه الطرق البارامبرية. وأخيرا، يناقش هذا المقال منطق الطرق المذكورة، والغاية من ذلك هو استيعاب منهجية تقييم الخيارات المالية من منظور نوعي.

الكلمات الرئيسية: الخيارات المالية، الحركة البراونية، بلاك شولز، النموذج ذات الحدين، مونتي كارلو.

I. Introduction aux options financières

1. Types d'instruments de couverture

Dans les marchés des matières premières, la fluctuation des cours des différents produits constitue un risque majeur pour les traders, les opérateurs économiques et les consommateurs. Face à cette volatilité, le marché a développé des instruments financiers qui permettent de couvrir à terme les prix d'achat et de vente des différents actifs. On distingue ainsi 2 types d'instruments de couverture (Hedging) :

a) Les instruments fermes

Les instruments fermes (ou contrats à terme) sont des contrats d'achat ou de vente d'un actif donné à un prix convenu à l'avance, et ce pour une durée déterminée (dite maturité du contrat). Ces types d'instruments sont symétriques, car le prix convenu d'avance peut s'avérer soit avantageux soit désavantageux par rapport à l'évolution du marché. Le contractant sera protégé contre les situations défavorables, mais il sera privé également des évolutions favorables.

Les Forwards et les Futures sont deux instruments fermes pratiquement similaires. Le premier est négocié sur un marché de gré-à-gré, entre acheteur et vendeur. Le vendeur s'engageant à livrer une certaine quantité de l'actif sous-jacent à un prix ferme et définitif, et l'acheteur s'engageant à en prendre livraison. Dans une transaction de gré-à-gré, les opérations y sont souvent moins standardisées et moins normalisées que dans un marché indexé, car toutes les conditions relatives à la transaction sont négociées bilatéralement. Quant au contrat Future, il est négocié sur un marché organisé (indexé), géré par une chambre de compensation. Les transactions proposées dans les marchés organisés sont standardisées et normalisées sous forme d'indexes, et les contreparties ne négocient pas bilatéralement mais placent des ordres d'achat et de vente d'indexes prédéfinis, ce qui permet de confronter l'offre et la demande et d'établir un prix de marché pour chaque contrat indexé. Les Forwards et les Futures ne sont exercés qu'à leur date de maturité : ils comportent un seul paiement à l'échéance, contrairement aux Swaps qui sont des contrats permettant plusieurs transactions tout au long de la durée de maturité.

b) Les instruments optionnels

A la différence des contrats à terme, les instruments optionnels (ou options) donnent le droit mais non l'obligation, d'acheter ou de vendre un actif donné à un prix fixé à l'avance, à une certaine maturité. Ainsi, l'acquéreur active son option et effectue la transaction au prix convenu lorsque l'évolution du marché ne lui est pas favorable. Dans le cas contraire, il profite de la bonne conjoncture du marché. S'inscrivant dans la théorie des options, cette asymétrie de traitement entre situations favorable et défavorable nécessite bien entendu le paiement d'une prime (ou premium).

- Option d'achat Call

Le Call est une option qui protège l'acheteur. Elle lui confère le droit, mais non l'obligation, d'acheter un actif à un prix convenu à l'avance (dit prix d'exercice ou Strike). Ainsi, lorsque le marché est en hausse, l'option est activée, et l'acheteur acquiert le produit au prix convenu initialement. Dans le cas contraire, il profite de la conjoncture baissière, et la transaction s'effectue au prix du marché (figure 1 (a)). Le Call peut donc être assimilé à la fixation d'un niveau plafond. En tant qu'acquéreur de l'option Call, l'acheteur profite des opportunités du marché normalement, tout en étant couvert contre les hausses. La prime d'un Call représente donc, pour l'acheteur, l'équivalent (ou le consentement) à payer pour annuler tous les risques de hausses au-dessus d'un certain niveau.

- Option de vente Put

Le Put est une option qui protège le vendeur. Elle lui confère le droit, mais non l'obligation, de vendre un actif sous-jacent à un prix convenu à l'avance (dit prix d'exercice ou Strike). Ainsi, lorsque le marché est baissier, l'option est activée, et le vendeur cède son produit au prix d'exercice. Dans le cas contraire, il bénéficie de la conjoncture haussière, et la transaction s'effectue au prix du marché (figure 1 (b)). Le Put peut donc être assimilé à la fixation d'un niveau plancher. Le vendeur bénéficiaire de l'option profite des opportunités du marché normalement, tout en étant couvert contre les fortes baisses. La prime d'un Put représente donc, pour le vendeur, l'équivalent (ou le consentement) à payer pour annuler tous les risques de baisse des prix en-deçà d'un certain niveau.

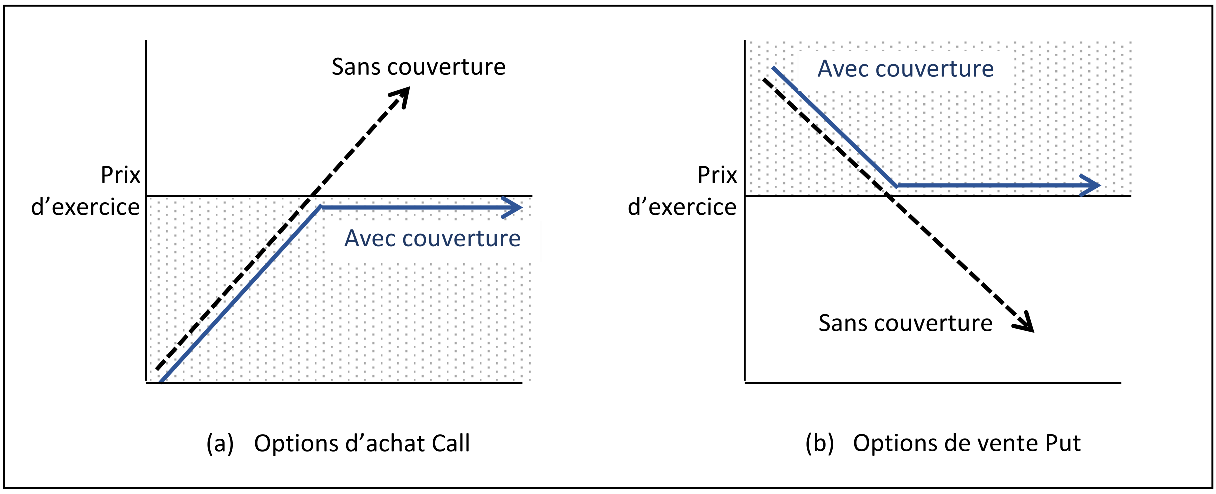
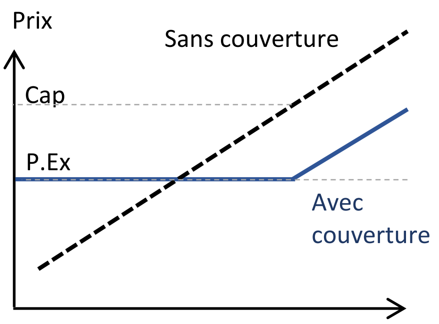
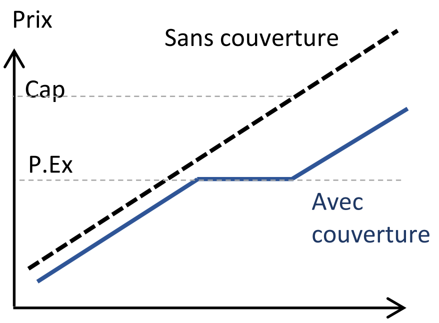
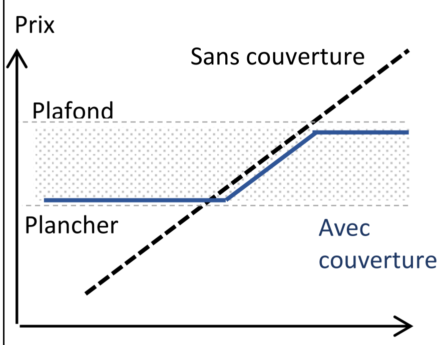
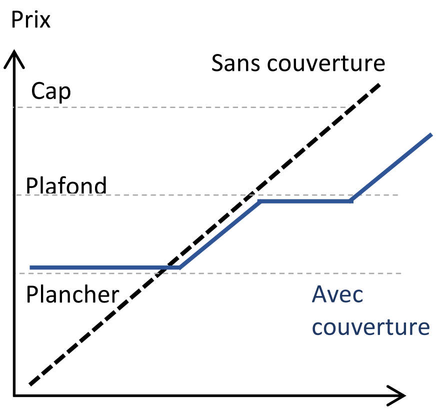


Figure 1 : Illustration d'une couverture par les options Call et Put

- Options combinées

Les options Call et Put sont les instruments optionnels de base. L'ingénierie financière a permis de créer plusieurs options combinées (ou plain-vanilla options) à partir de ces 2 instruments, afin d'offrir sur le marché une riche gamme de produits dérivés comme le Call Spread, le tunnel à prime nulle, le tunnel capé, etc. Par ailleurs, chaque entreprise peut développer sa propre « alchimie » en créant une combinaison d'options adaptée à sa propre stratégie commerciale..

Tableau 1 : Quelques options combinées

Swap cappé	Le swap cappé est un swap qui est limité par un niveau au-delà duquel la protection de l'acheteur devient partielle. Ce type de swap permet de réduire le prix du swap, en renonçant à une partie de la protection contre la hausse qui semblerait superflue. (Egalement appelé swap combiné avec vente de Call). **Objectif** : Figer le prix du sous-jacent jusqu'à un certain niveau (niveau cap), et protection partielle au-delà, à travers une indemnisation forfaitaire.	
Call Spread	Le Call Spread est un Call dont la protection devient partielle à partir d'un certain prix. Cet instrument est la combinaison de l'achat d'un Call, financé par la vente d'un autre Call. Cette Option permet de se couvrir à moindre coût par rapport à un Call classique. **Objectif** : Plafonnement du prix à un certain niveau (niveau Cap), et protection partielle au-delà, à travers une indemnisation forfaitaire.	
Tunnel (Collar)	Le Tunnel (ou Collar) est une combinaison de deux options qui permet de fixer un intervalle dans lequel varie le prix. Il s'agit à l'origine d'une Option d'achat Call qui permet de fixer un plafond, combinée à une Option de vente Put qui fixe un prix d'achat minimal, afin de financer le prix du Call. Ainsi, et contrairement à un Call individuel, aucune prime n'est requise. **Objectif** : Plafonner le cours du sous-jacent en contrepartie de la fixation d'un prix plancher.	
Tunnel cappé	Le Tunnel cappé est un tunnel limité par un niveau au-delà duquel la protection devient partielle. Il s'agit d'un Tunnel combiné à la vente d'un Call. Cette limitation de la protection à la hausse permet de réajuster les barrières du tunnel en baissant la limite inférieure pour profiter davantage des baisses du cours du sous-jacent. **Objectif** : Protection totale jusqu'à un prix plafond, et protection partielle au-delà, en contrepartie de la fixation d'un prix plancher favorable.	

2. Types d'options

OPTION EUROPEENNE. L'option européenne n'est exercée qu'à sa date de maturité. Par exemple, un Call Européen contracté au 1er janvier 2018 pour une maturité à fin mars, ne peut être effectivement exercé qu'au 31 mars, mais pas avant. Il s'agit d'une protection à un jour précis. Il est choisi par l'acheteur de manière à faire coïncider l'exercice de son option avec son achat (pétrole, gaz, sucre, blé, etc.). A cette date précise, si le prix du marché est supérieur au prix d'exercice, l'acheteur active son option et reçoit un Pay off compensatoire de la contrepartie bancaire, qui est égal à la différence entre le prix du marché au 31 mars et le prix d'exercice. Dans le cas inverse, il choisit de ne pas activer son option et achète son actif au prix du marché. Similairement, un Put Européen contracté au 1er janvier pour une maturité à fin mars, ne peut être effectivement exercé qu'au 31 mars. Le vendeur fixe la date de maturité de manière à la faire coïncider avec ses ventes. A cette date précise, si le prix du marché est inférieur au prix d'exercice, le vendeur active son option et reçoit un Pay off compensatoire de la contrepartie bancaire.

OPTION AMERICAINE. L'option Américaine peut être exercée pendant ou avant la date de maturité. Par exemple, un Call Américain contracté au 1er janvier pour une maturité à fin mars, peut être exercé à n'importe quel moment pendant ou avant le 31 mars. Comme nous le verrons après, l'option est plus chère lorsque la maturité est plus grande. Exercer un Call Américain avant l'échéance reviendrait à sous-exploiter la capacité de l'option, ce qui fait que le meilleur usage, en théorie, d'un Call Américain est de l'exercer à l'échéance, à l'image d'un Call Européen. C'est pourquoi le Call Américain est de même valeur qu'un Call Européen, selon Brealey et *al*. (Brealey et *al*., 2011, p.542). Pour le Put en revanche, l'option Américaine est toujours plus avantageuse que l'option Européenne, car dès qu'une situation avantageuse se présente, le vendeur peut vendre son actif pour maximiser le Pay off de l'option, et réinvestir immédiatement son capital dans un autre actif, avec en prime, un gain sur le taux d'intérêt. De ce fait, le Put Américain est certes plus cher que le Put Européen (*idem, p.543*).

OPTIONS EXOTIQUES. Les produits d'options sont très divers. Il existe plusieurs options spéciales ou peu conventionnelles, dites aussi options exotiques. On en cite à titre non-exhaustif les options avec dividende, les options de sélection, les options composées, les options flottantes, les options Spread, les options arc-en-ciel, les options binaires et les options de changement de temps (tableau 2).

Tableau 2 : Quelques options financières exotiques

Option Asiatique (de moyenne)	Option qui consiste à comparer le prix d'exercice au prix moyen de l'actif sous-jacent enregistré sur la période. Du fait qu'elles font intervenir un prix moyen au lieu d'un prix journalier ponctuel, les options Asiatiques présentent une moindre volatilité implicite et sont, de ce fait, généralement moins coûteuses que les options Américaines ou Européennes.
Option de Barrière	Option dont le Pay off dépend du fait que le prix de l'actif ait atteint ou pas un niveau spécifié. L'option d'activation ou Knock-in (up-in-in call ou down-and-in) put) ne prend naissance que lorsque l'actif sous-jacent atteint la barrière spécifiée. A l'inverse, l'option de désactivation ou Knock-out (down-and-out call or up-and-out put) cesse d'exister si le prix de l'actif atteint la barrière spécifiée.
Option Bermuda	Option exercée à des dates précises avant la maturité.
Option Caput	Option Call sur option Put.
Option de Sélection basique	Le titulaire de l'option choisit avant la maturité s'il exercera un Call ou un Put.
Option de Sélection complexe	Le titulaire de l'option a le droit de choisir avant la maturité s'il exercera un Call ou un Put à différents moments avec différents prix d'exercice.
Option Composée	Option appliquée sur une autre option.
Option Digitale (binaire)	Le gain possible est connu à l'avance. Il s'agit d'une somme fixe, qui ne dépend pas de l'écart entre le prix du marché et du prix d'exercice. Il suffit que le prix de marché se trouve du côté favorable du prix d'exercice pour que le titulaire de l'option empoche la somme convenue. Dans le cas contraire, il ne gagne rien et le coût d'achat de l'option est perdu.
Option Look-back fixe	A la maturité, le prix du marché retenu est le prix le plus favorable enregistré durant la période, qui est comparé au prix d'exercice fixé à l'avance.
Option Look-back flottante	Le prix d'exercice n'est pas fixé à l'avance, mais il n'est connu qu'à la date de maturité. Il correspond au prix du marché le plus favorable enregistré durant la période. Ainsi, le prix du marché à la maturité est comparé au prix du marché le plus favorable de la période.
Option Arc en ciel	Option Call (ou Put) sur le résultat le plus (ou le moins) favorable d'un panier.
Option Européenne avec dividende	Option Européenne d'un actif qui génère un dividende. Une partie de la valeur de l'actif comprend la valeur actuelle des dividendes. Or, le détenteur d'options n'a pas droit aux dividendes. Par conséquent, pour évaluer une option européenne sur un titre donnant droit à des dividendes, il faut réduire le prix de l'actif par la valeur actuelle des dividendes à payer avant la maturité de l'option.
Option Américaine avec dividende	Option Américaine d'un actif qui génère un dividende.
Option de démarrage futur (Forward start)	Une option de démarrage futur commence à une date future spécifiée avec une date d'expiration définie plus loin. Cependant, la prime est payée à l'avance et l'heure d'expiration est établie au moment de l'achat de l'option.
Option sur Future	Le titre sous-jacent est un Forward ou un Future.
Option Spread	L'option Spread consiste à acheter et à vendre plusieurs options sur un même sous-jacent mais à des prix d'exercice et des échéances différentes. Le Call Spread en est un exemple, c'est une combinaison d'achat d'un Call, et d'une vente d'un autre Call à un prix d'exercice différent, (cf. tableau x).
Option de changement de temps	Option dont la valeur augmente avec la durée où le prix du marché est supérieur au prix d'exercice pour l'option Call, et *vis versa* pour l'option Put.

Source : (Mun, 2005, p.278-291 ; Brealey et *al.*, 2011, p.544)

II. Méthodes d'évaluation des options financières

1. Déterminants de la valeur d'une option

Dans un premier temps, nous allons cerner la valeur d'une option. Considérons l'acquisition d'un Call Européen pour l'achat d'un produit à 400 $. A LA DATE DE MATURITE, si le prix du marché est inférieur à 400 $, le Call sera sans valeur. Si à l'inverse, le prix du marché est supérieur (par exemple 450 $), la valeur de l'option sera le Pay off qu'elle aura généré à son titulaire, soit la différence entre le prix du marché et le prix d'exercice (450 $ - 400 $ = 50 $), que nous représentons par la bande inférieure de la figure 2. Elle indique que la valeur d'une option ne peut être inférieure à cette bande.

MAIS LA VALEUR D'UNE OPTION EST DETERMINEE AU MOMENT DE LA TRANSACTION, PAS A LA MATURITE (?) Quoique l'option soit *pricée* dès le départ, le postulat reste valable AVANT LA MATURITE : le prix d'une option ne peut jamais être inférieur à la différence entre le prix du marché (de l'instant) et le prix d'exercice. Par exemple, dans le cas où le prix actuel est de 430 $, et le prix d'exercice est fixé à 400 $, si le prix du Call est inférieur à la différence – nous supposons ici qu'il vaut 20 $ - il y'aura une anomalie du marché car chacun peut acheter un call à 20 $ et l'utiliser pour acheter le produit à 400 $, soit un coût total de 420 $, puis le revendre aussitôt sur le marché à 430 $ et ainsi de suite. C'est pour cela, que le prix d'un Call ne peut pas laisser de pareilles opportunités d'arbitrage. Il sera réajusté à 30 $, puis constamment révisé avec l'évolution du prix du marché de sorte à ne pas être inférieur à la différence entre le prix actuel et le prix d'exercice.

La ligne diagonale de la figure 2, qui représente le prix du marché, constitue quant à elle la bande supérieure. Le prix du Call ne peut pas être supérieur à cette bande (c.à.d. au prix de marché du produit) car si la protection par le Call vaut plus que le prix du produit lui-même, autant acheter le produit directement. Ainsi, le prix d'un Call se trouve quelque part entre la différence (prix du marché – prix d'exercice du produit) et le prix du marché du produit, représentant respectivement la limite inférieure et la limite supérieure (figure 2).

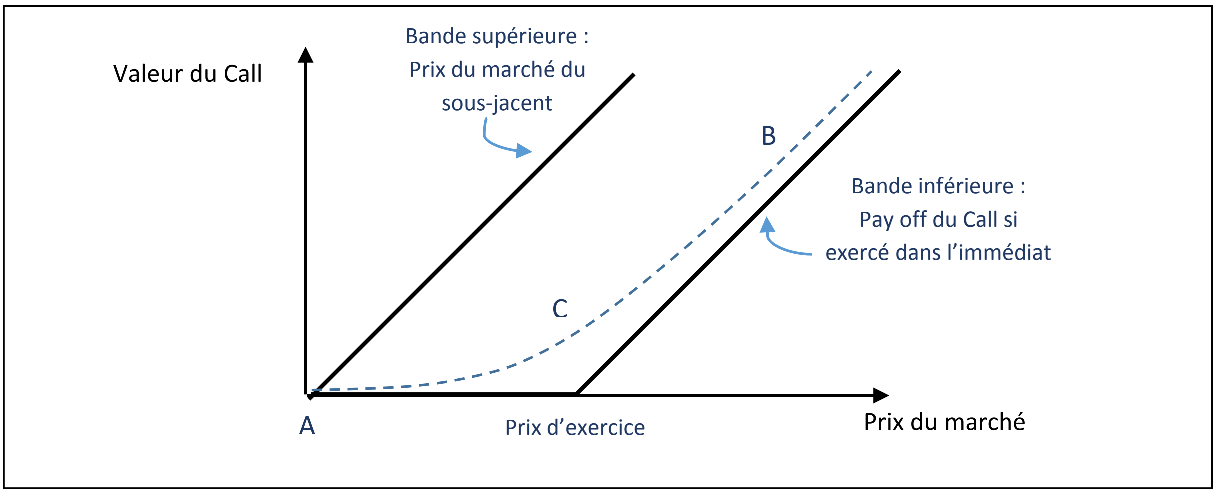


Figure 2 : Valeur d'un Call en fonction du prix du sous-jacent
Source : Brealey et *al.* (2011)

La courbe en pointillés représente la valeur d'un Call au moment de la transaction, en fonction du prix du marché. Dans ce schéma-ci, pour décrire l'allure de la courbe, Brealey, Myers et Allen ont identifié 3 points repères (Brealey et *al.*, 2011, p.514):

LE POINT A. Si au moment de la transaction le prix du marché est nul, l'option est également nulle. Dans ce cas extrême, un prix nul signifie que le bien n'a pas un soupçon d'utilité et de rareté sur le marché, ni même de perspective d'utilité et de rareté à long terme, et donc les chances de tirer profit d'une protection par un Call contre une éventuelle apparition d'un prix semblent être quasiment nulles. A ce point également, la distance avec le prix d'exercice est tellement importante que les chances d'un Pay off sont réduites à zéro. A partir du point A et en allant vers le point C, la valeur du Call augmente avec l'augmentation du prix du marché suivant une fonction monotone, car plus le prix du marché augmente et se rapproche en conséquence du prix d'exercice, plus il y'a de chances que le Call soit rentable à la maturité. Par exemple, la protection par un Call à 400 $ sera relativement peu chère si le prix du marché au moment de la transaction est de 300 $. Elle sera plus chère si le prix du marché est à 390 $, et encore plus chère si le prix du marché est à 430 $. En réalité, en parlant du prix du marché qui augmente, on désigne l'augmentation relative par rapport à un prix d'exercice fixe. Autrement dit, le prix de l'option dépend plutôt de la distance entre le prix du marché et le prix d'exercice.

1ERE VARIABLE : LE PRIX DU MARCHE.

La valeur d'une option Call augmente avec le prix du marché, Ceteris Paribus.

2EME VARIABLE : LE PRIX D'EXERCICE.

La valeur d'une option Call augmente quand le prix d'exercice diminue, Ceteris Paribus.

LE POINT B. Le point B représente la situation où le prix du marché dépasse largement le prix d'exercice. Plus le prix du marché augmente, plus la valeur de l'option converge vers la bande inférieure, et se rapproche du Pay off de l'option (prix du marché – prix d'exercice), car il devient de plus en plus certain que l'option soit exercée. Cette situation est tout à fait le contraire du point A à côté duquel la possibilité d'un Pay off devient de plus en plus invraisemblable. Les points A et B constituent des certitudes virtuelles quant à l'exercice de l'option, contrairement au point C qui, comme nous le verrons, constitue le point où l'incertitude sur l'option est la plus élevée.

Par ailleurs, lorsqu'un investisseur contracte un Call pour une échéance donnée (3 mois, 6 mois, 1 an), il sécurise le prix de son achat futur sans devoir payer l'achat de son produit dans l'immédiat. Généralement, lorsque les entreprises veulent sécuriser leurs achats futurs, ils achètent leurs intrants à l'avance pour bénéficier des remises d'échelle ou des opportunités du marché, ce qui leur coûte un déploiement du capital qui réduit leur trésorerie et leurs marges de manœuvre. La contraction d'une option permet aussi de sécuriser l'achat du produit dans le futur, avec une différence fondamentale : le possesseur de l'option ne paie dans l'immédiat que le prix de l'option, mais il ne paiera le prix du produit qu'au moment de l'acquérir, c.à.d. à la maturité. Tout se passe comme si l'option lui offrait le privilège de différer le paiement du produit, ou lui octroyait un prêt à l'achat du produit. Ainsi, l'expression du Pay off devient (prix du marché – prix d'exercice actualisé).

Le montant implicitement emprunté ici est le prix d'exercice. Les acheteurs qui acquièrent des produits par le moyen d'un Call sont dits acheteurs à crédit. Plus le taux d'intérêt est élevé, et la maturité éloignée, et plus la valeur de l'option est importante. La maturité est déterminante d'une part, parce qu'elle multiplie le taux d'intérêt, et d'autre part, parce que l'incertitude sur les prix augmente constamment avec le temps.

3ᴱᴹᴱ VARIABLE : LE TAUX D'INTERET

La valeur d'une option Call augmente avec le taux d'intérêt, Ceteris Paribus.

4ᴱᴹᴱ VARIABLE : LA MATURITE

La valeur d'une option Call augmente avec la maturité, Ceteris Paribus.

LE POINT C. Le point C correspond à la situation où le prix du marché est égal au prix d'exercice. Avant d'entamer le point C, on remarque qu'en allant vers les limites du point A et du point B, la valeur de l'option tend vers la valeur du Pay off si l'option est exercée sur le champ. Elle tend vers zéro en direction du point A, et vers la différence (prix du marché – prix d'exercice) en direction du point B.

En revanche, autour du point C, la valeur de l'option se décolle de la bande inférieure. Elle ne correspond pas au Pay off immédiat car dans cette zone de turbulence, chaque variation peut être décisive. Il y'a 50% de chances que le prix augmente à la date de maturité et que l'option soit profitable, et 50% de chances que le prix baisse et que l'option soit sans effet. C'est pourquoi les situations proches du point C sont à cheval entre la situation initialement défavorable à l'exercice de l'option (à gauche du point C) et qui est évidemment moins chère ; et la situation initialement favorable à l'exercice de l'option (à droite du point C) et qui est évidemment plus chère. Dans le jargon financier, nous désignons ces deux situations respectivement par les termes « option hors la monnaie » et « option dans la monnaie ».

La volatilité du produit détermine la hauteur de la courbe au point C, c.à.d. son détachement de la bande inférieure (figure 3). Plus le prix est volatile, plus l'option est chère, car les variations espérées sont substantielles et donc l'éventualité d'un dépassement du prix d'exercice devient plus importante en termes de probabilité et d'amplitude. Il est vrai que la volatilité d'un produit peut engendrer la hausse aussi bien que de la baisse. Toutefois, le caractère asymétrique des contrats d'option fait en sorte l'acquéreur d'une option bénéficie pleinement des hausses tout en étant protégé contre les baisses. Si le prix du marché est inférieur au prix d'exercice, l'option ne générera aucun Pay off, qu'importe si la baisse est de quelques centimes ou de plusieurs unités monétaires. Alors que si le prix du marché est supérieur au prix d'exercice, le titulaire de l'option bénéficie de toute la différence. En outre, plus le produit est risqué, plus le besoin d'effectuer une couverture devient justifié et donc le consentement à payer augmente, ce qui fait également de la volatilité un facteur directement favorable à la valorisation de l'option.

5ᴱᴹᴱ VARIABLE : LA VOLATILITE

La valeur d'une option Call augmente avec la volatilité, Ceteris Paribus.

Tableau 3 : Déterminants de la valeur d'une option

Si on augmente :	Effet sur la valeur d'un Call	Effet sur la valeur d'un Put
Prix du marché	Augmente	Diminue
Prix d'exercice	Diminue	Augmente
Taux d'intérêt sans risque	Augmente	Diminue
Maturité	Augmente	Augmente
Volatilité	Augmente	Augmente

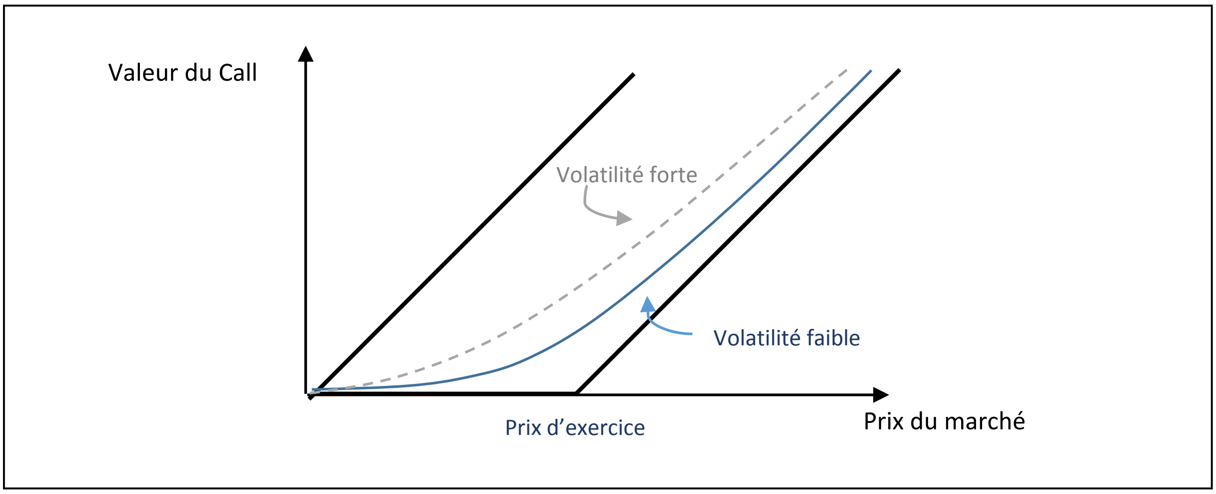


Figure 3 : Effet de la volatilité sur la valeur d'un Call
Source : Brealey et *al.* (2011)

2. Méthodes d'évaluation des options financières

Les options européennes peuvent être évaluées moyennant 3 méthodes à savoir la simulation de Monte Carlo, la formule Black-Scholes et le modèle binomial Cox-Ross-Rubinstein (CRR) pour le cas des processus browniens géométriques, et par équations différentiels pour les processus en retour vers la moyenne et en saut de diffusion. Nous nous limiterons toutefois dans cet article d'initiation au mouvement brownien géométrique sans paiement de dividendes. Pour les options américaines, étant donné qu'elles peuvent être exercées à n'importe quel moment avant la maturité, celles-ci se prêtent difficilement à l'évaluation par les modèles de forme close. Elle se fait uniquement par le modèle binomial CRR car sa discontinuité permet d'inclure l'exercice d'option à tout moment, ou en utilisant les formules approximatives de Barone-Adesi & Whaley pour l'évaluation d'un Call américain (Barone-Adesi & Whaley, 1987), ou celle de Bjerksund-Stensland (Bjerksund & Stensland, 2006) pour l'évaluation d'un Put américain. Puisque toutes ces méthodes sont paramétriques et se basent sur un processus de Wiener (ou mouvement brownien), nous présentons tout d'abord le mouvement brownien géométrique qui est la base de ces modèles, puis nous aborderons la simulation de Monte Carlo, la formule Black-Scholes et le modèle binomial CRR.

Tableau 4 : Méthodes d'évaluation des options européennes et américaines

Types d'options	Méthodes d'évaluation		
Options européennes	Simulation de Monte Carlo	Formule Black-Scholes	Modèle binomial CRR
Options américaines	Approximation : Modèle Barone-Adesi-Whaley pour option Call Modèle Bjerk-Sund pour option Put		Modèle binomial CRR

a) *Le mouvement brownien géométrique*

La détermination du prix d'une option à la date t_0 dépend de la prévision que l'on se fait du prix du sous-jacent dans le futur. Pour cela, il est nécessaire de modéliser l'évolution temporelle des prix de manière à refléter aussi bien la tendance centrale que les ramifications stochastiques. La science économique s'est inspirée d'un modèle mathématique qui a permis de décrire le mouvement aléatoire des fluides. Le mouvement brownien, dit aussi processus de Wiener, est une description mathématique du mouvement irrégulier et imprévisible observé chez une particule immergée dans un fluide, qui n'est soumise qu'aux chocs avec les molécules du fluide environnant (Roman, 2004, p.237).

Outre son apport au niveau de la science thermodynamique et mécanique, ce mouvement est aussi très utilisé dans les mathématiques financières, où les prix des actifs, tout aussi aléatoires, sont assimilés à cette particule qui subit d'infinis petits chocs non recensables.

Le mouvement brownien est donné en général par la forme mathématique suivante. Il admet une partie déterministe, qui est en quelque sorte la tendance du prix, et une partie stochastique qui est représentée par une distribution normale :

$$H_t = \mu t + \sigma\sqrt{t}W_t$$

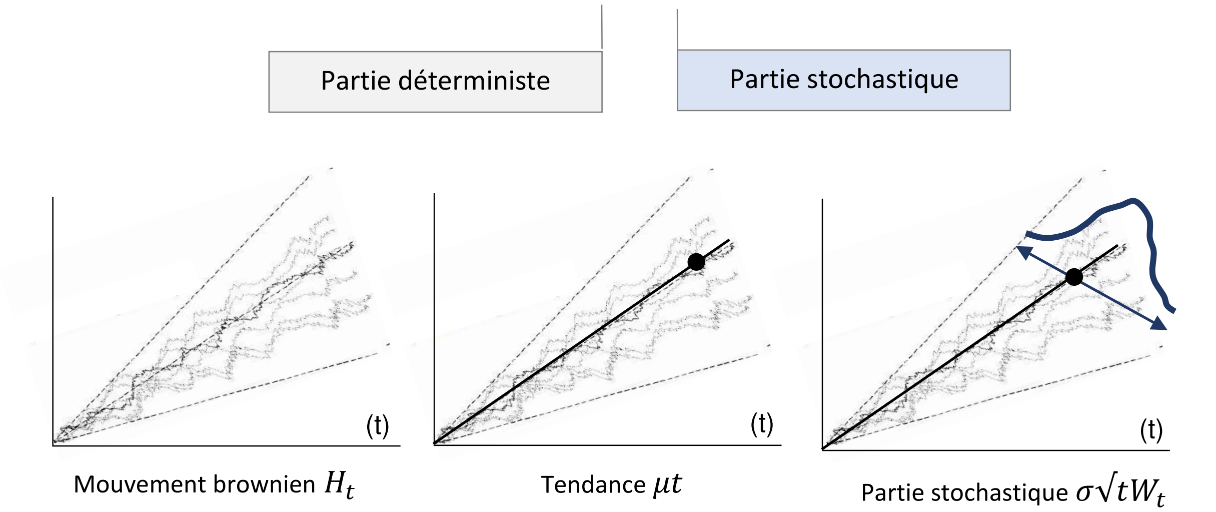


Figure 4 : Parties déterministe et stochastique d'un mouvement brownien

$$H_t = \mu t + \sigma\sqrt{t}W_t$$

$\boldsymbol{H_t}$: Mouvement brownien, décrivant une distribution normale des mouvements possibles.
$\boldsymbol{\mu}$: Drift (ou tendance générale de la variable : stable, hausse ou baisse) qui évolue avec t.
t : Temps continu.
$\boldsymbol{\sigma}$: Volatilité espérée.
$\mathbf{W_t}$: Mouvement brownien « standard », décrivant une distribution normale centrée réduite.
Le mouvement brownien standard a un drift nul (μ = 0) → distribution centrée.
Le mouvement brownien standard a une volatilité standard (σ = 1) → distribution réduite.

Dans ce modèle, les premières réflexions ont considéré que les prix des actifs suivent un mouvement brownien similaire à celui de la particule dans le fluide. En effet, les vicissitudes des prix sont effectivement induites par un large nombre de facteurs notamment l'offre et la demande, les échanges des autres actifs sur les marchés ou encore les évènements économiques et géopolitiques. Aussi, la distribution normale de l'aléa semble être, a priori, une hypothèse raisonnable en considérant que ces multiples facteurs sont plus ou moins indépendants et de distribution similaire.

Néanmoins, cette réflexion admet deux contraintes. En premier lieu, le mouvement brownien peut être négatif, car la distribution normale admet une extrémité négative qui tend vers moins l'infini, tandis que les prix ne sont jamais négatifs. En second lieu, les incréments $H_t - H_{t-1}$ représentant la variation du prix entre l'instant (t-1) et l'instant (t) sont, par définition, stationnaires dans un mouvement brownien, et par conséquent le drift (accroissement tendanciel du prix) $\mu(\Delta t)$ est linéaire et non-corrélé au prix initial, ce qui ne semble pas être très réaliste. Par exemple, un accroissement prévisionnel du prix de 10$ semble réaliste lorsque le prix actuel est de 100$, mais il est irréaliste si le prix actuel est de l'ordre de 1$. Ce qui implique la nécessité de corréler les accroissements aux prix initiaux. Pour corriger ces obstacles conceptuels, les accroissements des prix sont considérés géométriques, et par conséquent les prix ont été assimilés à des mouvements browniens géométriques (Roman, 2004, p.241). Par définition, un processus stochastique de la forme $\{e^{Ht} / t \geq 0\}$, où H_t est un mouvement brownien, est un mouvement brownien géométrique.

$$H_t = log\left(\frac{S}{S_o}\right) = \mu t + \sigma\sqrt{t}W_t$$

$$\underbrace{S_t}_{\text{Prix à l'instant t}} = \underbrace{S_o}_{\text{Prix initial}}\ \overbrace{e^{Ht}}^{\text{Accroissement géométrique}}$$

Figure 5 : Mouvement brownien géométrique d'un prix

- Hypothèses du modèle

Le modèle Black-Scholes repose sur une hypothèse principale, qui admet que le prix d'un actif (S) suit un mouvement brownien géométrique, c.à.d. que sa partie stochastique suit une distribution log-normale. La figure 6 illustre la distribution log-normale d'un prix avec une espérance donnée. Théoriquement, sous l'hypothèse d'un univers neutre au risque (c.à.d. les hausses et les baisses des prix sont supposées de probabilités équivalentes), la probabilité d'avoir un prix supérieur à cette espérance est pratiquement la même que celle d'avoir un prix inférieur, d'où l'équivalence entre l'aire qui précède l'espérance, et celle et celle qui vient après l'espérance. Toutefois, le comportement des prix à la hausse est différent de la baisse, car les augmentations des prix ne sont pas limitées, et donc le côté droit de la courbe tend vers plus l'infini. En revanche, les baisses sont limitées car le prix ne peut descendre en dessous de zéro, ni même en dessous des coûts de production. Par conséquent, les probabilités de hausses sont bien étalées vers l'avant, alors que les probabilités de baisses sont plutôt concentrées. La distribution log-normale semble répondre aux caractéristiques les plus importantes des prix. Elle sera personnalisée pour chaque actif par son espérance et son écart-type spécifique. Le modèle admet également d'autres hypothèses à savoir une volatilité σ constante.

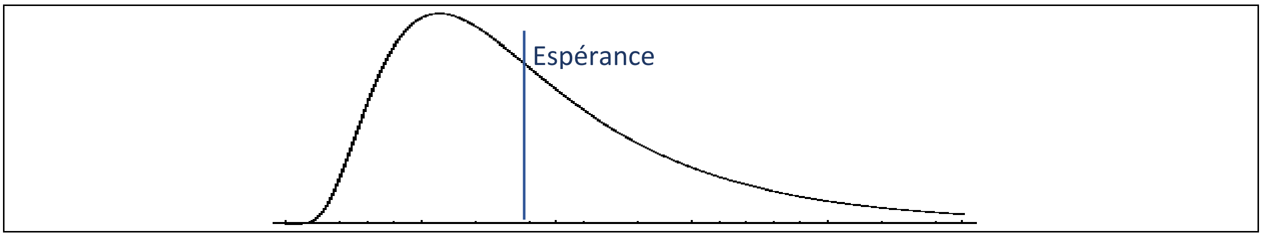


Figure 6 : Distribution log-normale du prix (S)

b) *Méthode de maximisation des Pay off par la simulation de Monte Carlo*

L'évaluation des options peut être faite par la simulation de Monte Carlo. La méthode consiste à simuler plusieurs fois le prix futur de l'actif à travers le mouvement brownien géométrique, et de capter le Pay off de l'option à chaque scénario simulé. La valeur de l'option est l'espérance des Pay off qu'elle peut générer dans le futur, actualisée au taux d'intérêt sans risque (Mun, 2005, p.235-241). La figure 7 montre que lors de la simulation, toutes les variables de la formule du mouvement brownien géométrique sont fixes, excepté le terme W_t qui est un générateur de nombres aléatoires suivant la loi normale centrée réduite, et dont la simulation induira la génération des résultats de S_t. Le terme σ√t représente la volatilité de la période considérée. Elle détermine le degré de la variation stochastique par la simulation. Plus sa valeur est élevée, plus les scénarii créés seront éloignés de la tendance centrale.

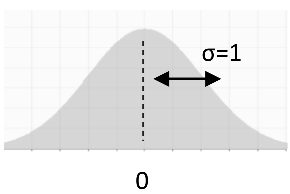
$$S_t = S_o\, e^{\mu t + \sigma\sqrt{t}\boldsymbol{W_t}}$$

Aléa : distribution normale centrée réduite

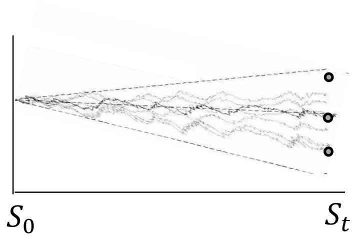
Tendance du prix

Amplificateur de l'aléa

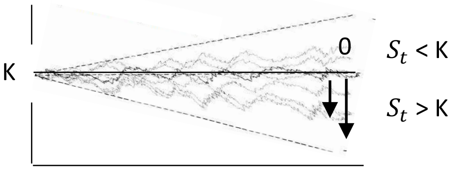
1. Simulation de W_t suivant une loi normale centrée réduite.



2. Obtention de plusieurs valeurs de S_t.



3. Obtention de plusieurs valeurs de Pay off [Max (0 ;K − S_t)]



4. Obtention de la simulation puis de l'espérance (après actualisation)

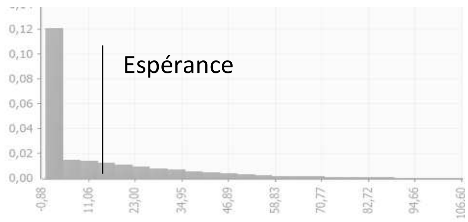


Figure 7 : évaluation d'une option par la simulation de Monte Carlo

In fine, l'évaluation des options Call et Put européennes par la simulation de Monte Carlo est donnée par les formules suivantes :

Formule Call

$$C = E\,[Max\,(0\,;S_t - K)\,]\,e^{-rt}$$

Formule Put

$$P = E\,[Max\,(0\,;K - S_t)\,]\,e^{-rt}$$

c) *Le modèle Black-Scholes*

Le modèle Black-Scholes pour les options européennes Call et Put est donné par les formules ci-après. Le passage du Call vers le Put et *vis versa* peut être obtenu par la formule de parité Call-Put :

Parité Call-Put

$$C = P + S_o - Ke^{-rt}$$

Formule Call

$$C = S_o\,\phi(d_1) - Ke^{-rt}\,\phi(d_2)$$

Formule Put

$$P = Ke^{-rt}\,\phi(-d_2) - S_o\,\phi(-d_1)$$

Avec

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\left[\,ln\left(\frac{S_o}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right] \qquad ; \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

- Une démonstration intuitive

Dans cette partie, nous expliquons la formule Black-Scholes de manière conceptuelle et intuitive. Pour la démonstration mathématique complète, nous renvoyons à la littérature notamment Black et Scholes (1973) et Roman (2004). La figure 8 schématise la couverture d'un actif par une option de vente Put. La zone (A) représente la protection offerte par le Put. Si le prix (S) est inférieur au prix d'exercice (K), l'option génère à son détenteur un Pay off (↑) qui va ramener le prix (S) au prix d'exercice (K), car ce dernier est supposé être le niveau plancher en dessous duquel le prix de l'actif ne baissera point. La zone (B) représente le scénario où le prix (S) est plus intéressant que le prix d'exercice (K). Dans ce cas, l'option Put n'intervient pas, et la vente s'effectue au prix du marché (S).

La valeur d'une option Put, qui doit être définie à l'instant t_0, est équivalente au gain prévisionnel qu'elle pourrait générer à son détenteur, c.à.d. l'intégrale de la zone (A). Conceptuellement, il s'agit de la différence (K) – (S) générée par le Put, multipliée par la probabilité d'avoir l'évènement (S) < (K).

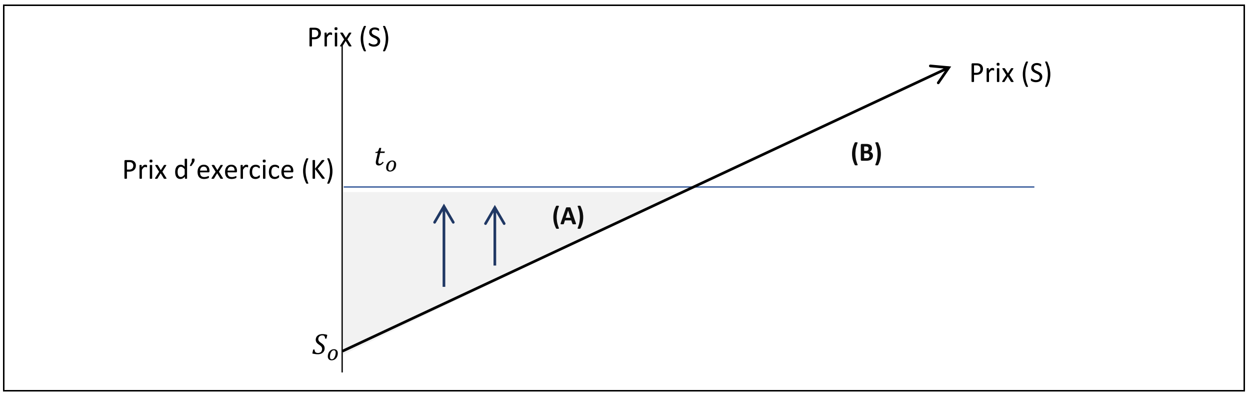
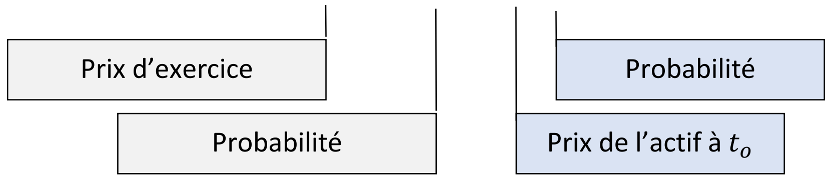


Figure 8 : illustration du Pay off d'une option Put

Intuitivement, la formule Black-Scholes d'une option *Put* exprimée ci-dessous (figure 9) s'apparente en effet à la différence (K)-(S), chacun des termes étant multiplié par la probabilité ϕ que [K > S]. Il apparait toutefois que la probabilité associée à (K) qui est [$\phi(h)$] est quelque peu différente de la probabilité associée à (S) qui est [$\phi(h-b)$]. Cela revient au fait que le prix d'exercice (K) est fixe alors que le prix du marché (S) est fluctuant, et ne restera pas constant à S_o. Cette fluctuation fait varier la probabilité de l'évènement [K > S], ce qui explique la correction apportée à la probabilité associée à (S_o), par l'écart-type espéré (b), pour obtenir [$\phi(h-b)$].

$$P = Ke^{-rt}\ \phi(h)\ \text{-}\ S_o\ \phi(h-b)$$



Où :

K : Prix d'exercice.

$\boldsymbol{e^{-rt}}$: Actualisation du prix d'exercice (K).

r : Taux d'actualisation sans risque, figurant sur l'opérateur exponentiel.

$\boldsymbol{S_o}$: Prix de l'actif à l'instant (t_o).

Figure 9 : schématisation des compartiments de la formule Black-Scholes

Comme mentionné précédemment, si le prix (S) suit un mouvement brownien géométrique, décrivant une distribution log-normale, c'est parce que, intrinsèquement, son accroissement géométrique suit un mouvement brownien normal H_t, décrivant une distribution normale. Cette propriété nous ramène à nous intéresser mathématiquement aux accroissements géométrique des prix (figure 10).

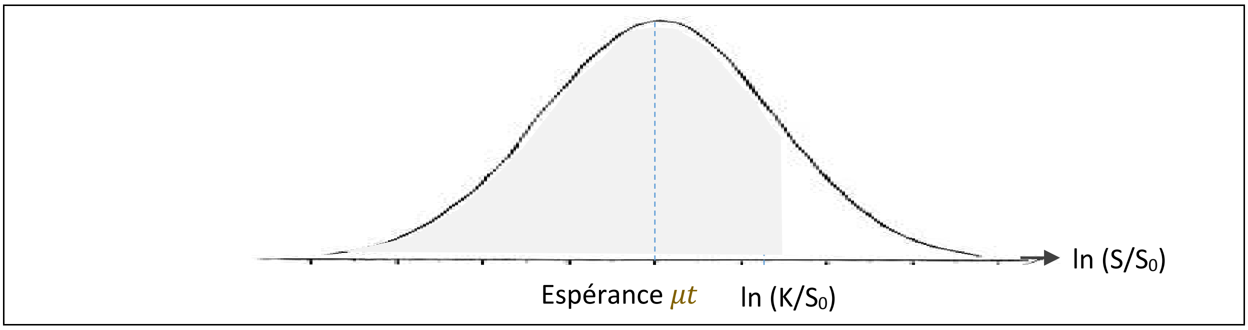


Figure 10 : Accroissement géométrique du prix ln (S/So)

Dans cette figure, les accroissements des prix ln (S/S_0) inférieurs au point ln (K/S_0) représentent les accroissements qui réalisent que le prix (S) reste inférieur au prix d'exercice (K) : (S) < (K). Ainsi, la probabilité recherchée ϕ pour que, à la date (t), le prix (S) soit inférieur au prix d'exercice (K) est illustrée par l'aire grise, qui indique la probabilité que l'accroissement du prix ln (S/S_0) n'excède pas le niveau d'accroissement ln (K/S_0) permettant d'atteindre le prix d'exercice (K). Cette probabilité cumulée n'est donc autre que la fonction de répartition ϕ de la loi normale allant de $-\infty$ jusqu'à ln (K/S_0). Sachant que la fonction de répartition est, par définition, une fonction centrée réduite, il sera procédé au centrage et à la réduction de la variable ln (S/S_0) qui deviendra :

$$ln\left(\frac{S}{S_o}\right) \rightarrow \quad h = \frac{ln\left(\frac{S}{S_o}\right) - Moyenne}{Ecart-type}$$

Donnée par : $(r - \frac{\sigma^2}{2})\, t$

$\sigma\sqrt{t}$

Figure 11 : Centrage et réduction des incréments logarithmiques ln (S/S_0)

L'expression de la moyenne (ou drift) $\mu = (r- \sigma^2/2)t$ a été obtenue par le modèle Cox-Ross-Rubinstein en passant d'une mesure en martingale vers une mesure continue, ou à travers le lemme d'Itô. Nous renvoyons à la littérature pour plus de détail sur la démonstration, notamment Roman (2004, p.239-303). Ainsi, l'aire grise dans la figure 10 est calculée par la fonction de répartition suivante :

$$\phi(h) = \phi\left(\frac{ln\left(\frac{K}{S_o}\right) - (r - \frac{\sigma^2}{2})\, t}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

qui est l'intégrale de la loi normale allant de moins l'infini jusqu'à ln (K/S_0), elle représente la probabilité cumulée que (S) < (K), qui est en d'autres termes, la probabilité que le risque se concrétise et que l'option Put s'active et génère un Pay Off. *In fine,* la formule Black-Scholes pour l'évaluation d'un Put européen s'écrit comme suit :

$$P = Ke^{-rt}\, \phi(h) \text{ - } S_o\, \phi(h - b)$$

Avec

$$h = \left(\frac{ln\left(\frac{K}{S_o}\right) - (r - \frac{\sigma^2}{2})\, t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \quad \text{et} \quad b = \sigma\sqrt{t}$$

Autrement formulé

$$P = Ke^{-rt}\ \phi(-d_2) - S_o\ \phi(-d_1)$$

Avec

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\ [\ ln\ \left(\frac{S_o}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) t]$$

et

$$d_2 = d_1 - \ \sigma\sqrt{t}$$

Les probabilités ϕ de la formule représentent l'aire grise de la figure x qui renvoie à un accroissement insuffisant pour que le prix (S) excède le prix d'exercice (K), et donc à l'exercice de l'option Put. Par ailleurs, et comme expliqué précédemment, la probabilité ϕ associée à (S_o) a été corrigée par rapport à celle de (K) car la variation continue de (S) sollicite un centrage permanent de la variable.

d) *Le modèle binomial CRR*

Le modèle binomial CRR se présente comme une simulation discrète du prix, ou encore une propagation discrète de l'incertitude à travers le temps (figure 12). L'incertitude se caractérise par une attitude croissante avec le temps quoique le risque puisse rester inchangé. En effet, à risque constant, il est plus aisé de prédire le prix d'un actif dans un mois que dans une dizaine d'années, ce qui nous renvoie à la notion dite de « cône de l'incertitude ». La figure 12 illustre le cône de l'incertitude de manière continue et discontinue. La forme continue n'est autre que le mouvement brownien géométrique, et la forme discontinue est le modèle binomial CRR dont les pas temporels suivent un mouvement brownien géométrique marginal par unité de temps δt.

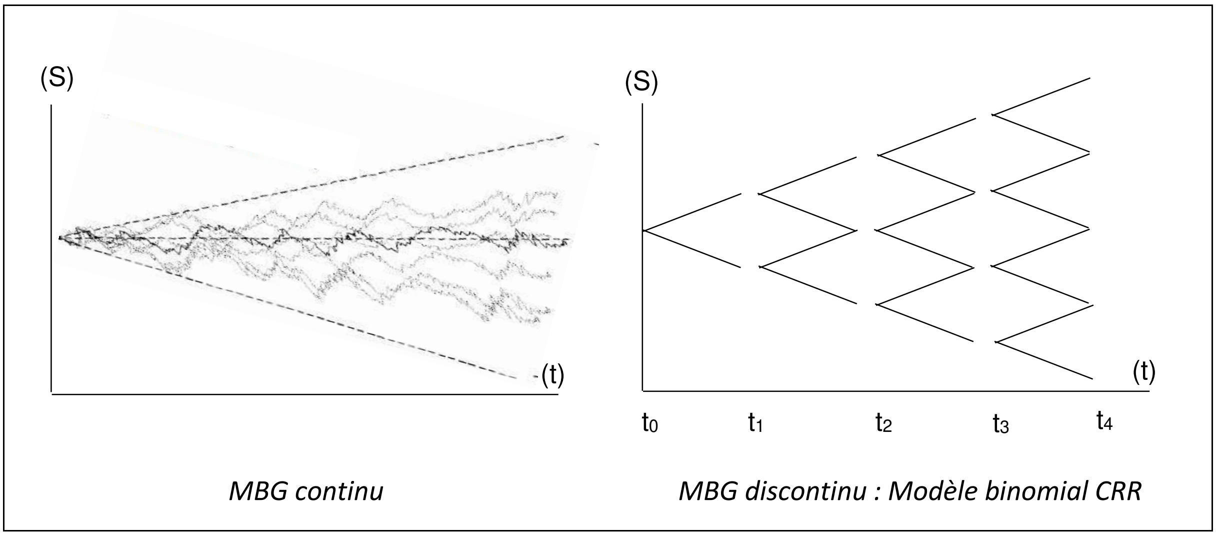


Figure 12 : le modèle binomial CRR à travers le cône de l'incertitude

Le modèle binomial CRR est une simulation discrète du cône de l'incertitude, alors que le mouvement brownien est une simulation continue du cône de l'incertitude.

Le modèle binomial avance par pas-de-temps (time-steps) browniens géométriques. Au temps t_0, deux scénarii s'ouvrent vers le temps t_1, soit une hausse soit une baisse du prix. Les possibilités de hausse et de baisse suivent une logique log-normale, c.à.d. que la variation probable vers la hausse est plus étalée et donc un pourcentage de hausse relativement important, et la variation probable vers la baisse plus concentrée et donc un pourcentage de baisse relativement moins important (figure 12 et figure 13). Au temps t_1, les possibilités obtenues seront à leur tour projetées vers t_2 sous l'hypothèse d'un mouvement brownien géométrique, et ainsi de suite. Au final, et à long terme, l'arbre obtenu tendra vers une forme log-normale : les baisses convergeront vers une valeur positive, ou, à l'extrême, vers zéro, alors que les hausses tendront vers l'infini.

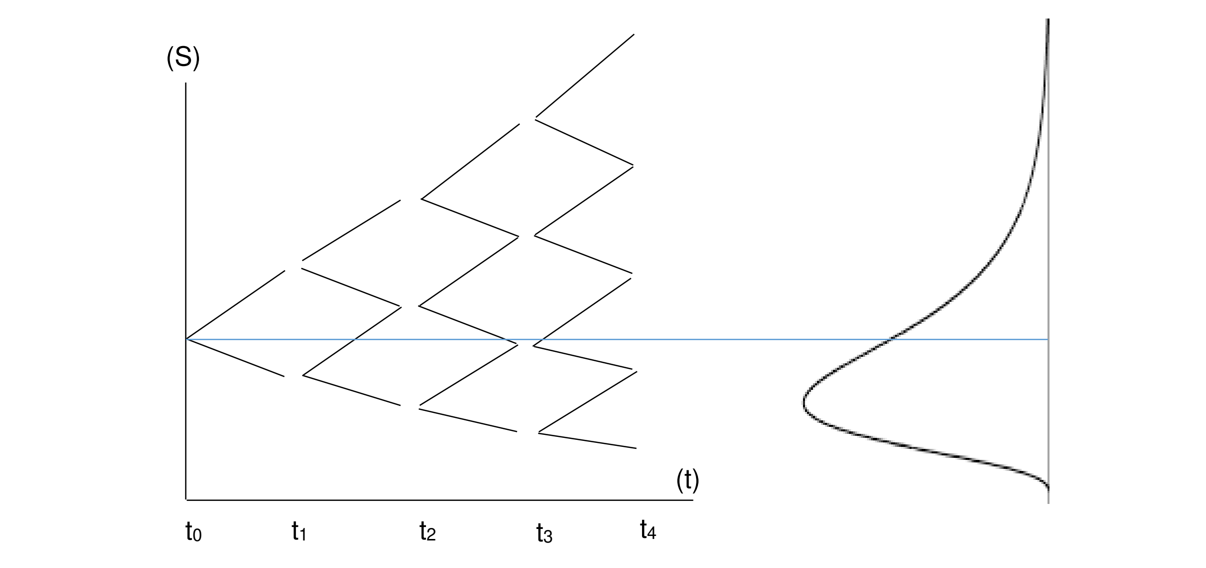


Figure 13 : Evolution du modèle binomial suivant le profil log normal

QUELS PAS-DE-TEMPS ? Si l'option a une maturité d'un an, et qu'on la segmente en 10 pas-de-temps, on obtiendra 10 intervalles de 0,1 an. Si on la segmente en 100 pas-de-temps, on obtiendra 100 intervalles de 0,01 an, et ainsi de suite. Dans ce modèle discret, plus on augmente le nombre de pas, plus l'intervalle de variation est réduit, la granularité augmente, et par conséquent, le modèle devient de plus en plus précis. Certains auteurs estiment que le modèle devient acceptable entre 100 et 1000 pas. En continuant à augmenter incessamment le nombre de pas, les intervalles de variations tendent vers zéro, et le résultat du modèle binomial CRR tend vers celui du modèle continu de Black-Scholes.

La méthode binomiale comprend deux phases majeures. La première consiste à construire l'arbre de l'amont à l'aval, en partant du prix de base S_0 vers les prix futurs. On obtient ainsi la première carte qui est l'arbre des prix. La seconde phase va dans le sens contraire, de l'aval vers l'amont. Elle consiste à associer à chacun des prix finaux le Pay off de l'option correspondant (selon que l'option est exercée ou pas), puis de remonter l'arbre progressivement et définissant, pour chaque nœud, sa valeur d'option. Par ce processus appelé l'induction rétrospective, on obtient la deuxième carte qui est l'arbre des Pay off prévisionnels. Le dernier Pay off obtenu qui est celui du premier nœud de l'arbre est la valeur d'option. On remarque que le principe est le même que celui de la méthode de Monte Carlo. En se positionnant dans le présent, on estime l'espérance des Pay off que générerait l'option dans le futur.

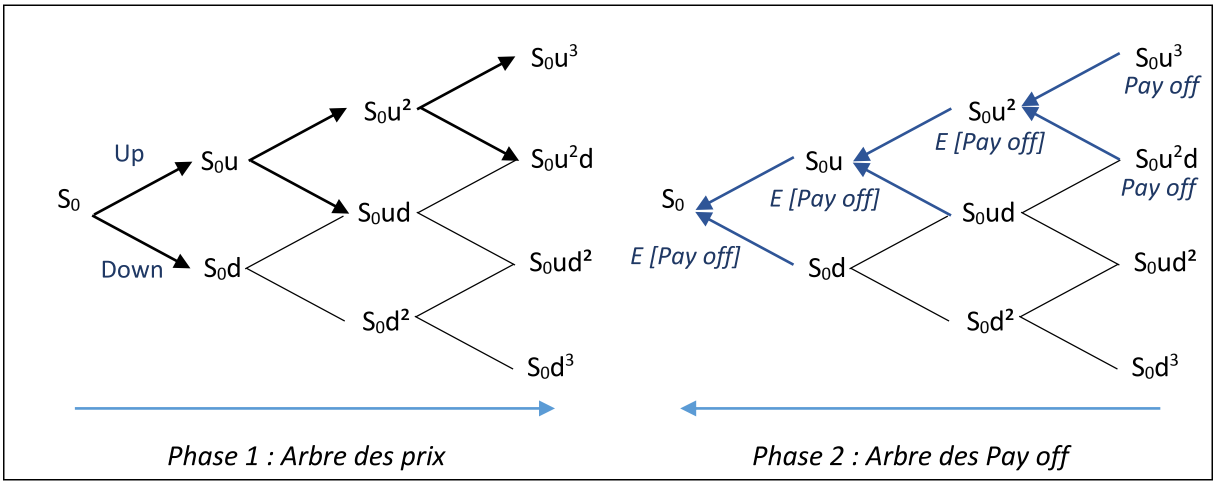


Figure 14 : construction de l'arbre binomial

- Construction de l'arbre des prix

Comme pour les méthodes précédentes, les inputs du modèle sont le prix de l'actif (S), le prix d'exercice (K), la volatilité annualisée (σ), la maturité (t) et le taux d'intérêt sans risque (r) (nous n'avons pas besoin de considérer le cas des dividendes). En partant du prix de base S_0, le facteur d'évolution vers la hausse à t_1 est u (par référence à *up*) et le facteur d'évolution vers la baisse est d (par référence à *down*). Ces deux facteurs, qui obéissent à une logique brownienne géométrique, se calculent par les formules suivantes :

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$$

Où :
$\boldsymbol{\delta t}$ *:* Intervalle de temps entre deux nœuds
$\boldsymbol{\sigma}$ *:* Volatilité annualisée

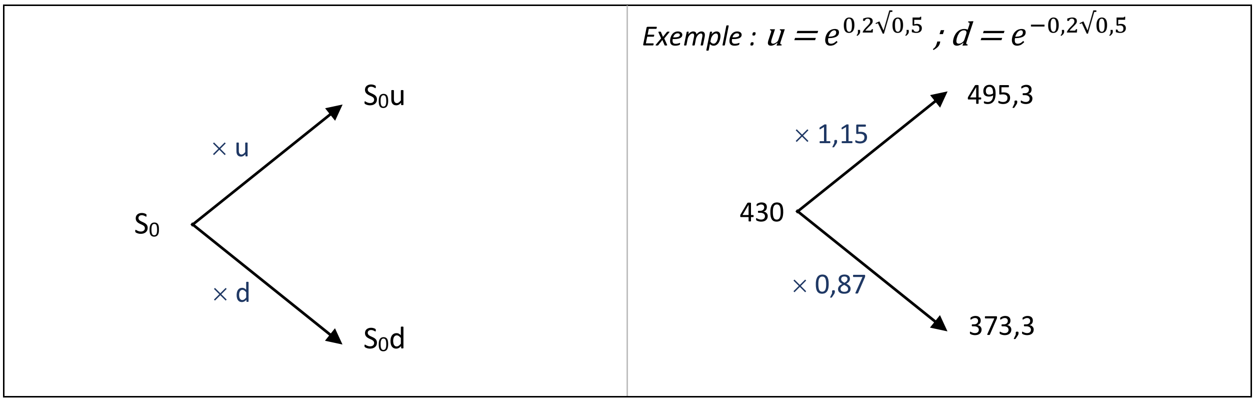


Figure 15 : détermination des prix dans les nœuds de l'arbre binomial

- Construction de l'arbre des Pay off

Les nœuds terminaux de l'arbre des prix représentent les scénarii de prix auxquels le manager sera confronté à la maturité. Dans chacune de ces situations, selon que le prix du marché est favorable ou pas au prix d'exercice, il choisira, selon le cas, d'activer son option ou pas. Nous obtenons ainsi les Pay off possibles à la maturité, qui sont positifs lorsque l'option est activée, et nuls lorsque l'option n'est pas activée (figure 16). A partir de cette étape, on construit l'arbre des Pay off par induction rétrospective. Cela consiste à dire que le Pay off de chaque nœud intermédiaire est l'espérance actualisée des Pay off des deux nœuds suivants : E = [p× Pay off 1 + (1-p) × Pay off 2]$e^{-r\delta t}$.

Cela suppose au préalable de calculer les probabilités de hausse et de baisse (p) et (1-p), moyennant l'une des deux approches suivantes. La première consiste à établir les probabilités de hausse et de baisse dans un univers neutre au risque. La seconde consiste à reproduire un portefeuille du marché qui débouche sur le même résultat de l'option, à savoir la couverture du risque de hausse ou de baisse.

Le concept de l'univers neutre au risque, qui provient par ailleurs du théorème central limite, stipule que dans l'absolu, la hausse et la baisse ont les mêmes chances de se réaliser et se neutralisent probabilistiquement, et donc leur espérance n'est égale qu'au taux d'intérêt sans risque. On obtient de ce postulat la probabilité de la hausse qui est (p) et la probabilité de la baisse qui est (1-p) par la formule suivante :

$$p \times u + (1\text{-}p) \times d = e^{r}$$

$$p = \frac{e^{r.\delta t} - d}{u - d}$$

Exemple :

$$p = \frac{e^{0.03*0,5} - 0,75}{1,33 - 0,75} = 45,7\%$$

Ces probabilités (p) et (1-p) serviront à estimer les espérances de Pay off qui sont indiquées dans la figure 16, et donc, de remonter l'arbre binomial par induction rétrospective. Nous présentons dans la figure 16 une partie du processus en zoomant sur deux nœuds terminaux de la figure 14. L'exemple présenté est un Call européen avec un prix d'exercice de 450. Les inputs du modèle sont : r=3% ; δt=0,5 ; p=45,7%.

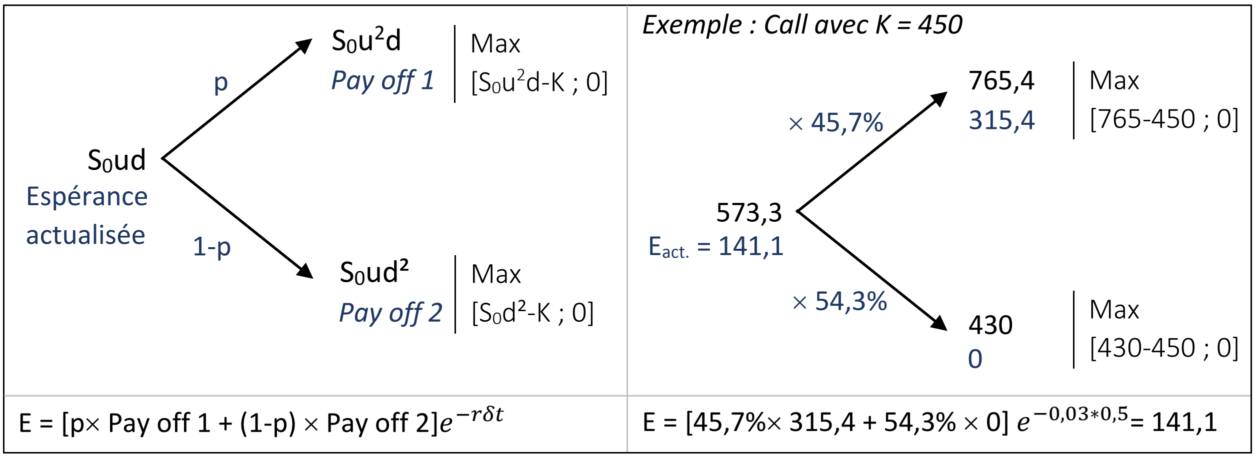


Figure 16 : détermination des Pay off dans les nœuds de l'arbre binomial

En utilisant le même procédé, on remonte l'arbre binomial jusqu'au premier nœud. L'espérance actualisée du Pay off à ce niveau-là n'est autre que la valeur de l'option. La différence entre l'option européenne et l'option américaine réside dans le fait suivant : dans l'option européenne, on remonte l'arbre en faisant l'espérance des espérances obtenues. En revanche dans l'option américaine, puisque l'option peut être exercée même dans les nœuds intermédiaires, on retient le maximum entre l'espérance obtenue et le Pay off de l'option si exercée immédiatement. Il faudrait par ailleurs vérifier si l'option n'est pas exerçable dès le premier nœud. Si elle est exerçable, il faudrait retrancher son Pay off de la valeur de l'option, comme nous le verrons dans l'exemple des options réelles d'expansion.

IMPACT DE LA VOLATILITE. Dans la construction de ces modèles, la volatilité annualisée est multipliée par la racine carrée du temps restant à la maturité $(\sigma\sqrt{t})$ dans le modèle Black-Scholes, et par la fraction temporelle de l'intervalle dans le modèle binomial $(\sigma\sqrt{\delta t})$. Plus la volatilité est importante, plus les bifurcations de l'arbre binomial sont écartées, et plus l'arbre prend de la largeur. A l'inverse, plus la volatilité est faible, plus l'arbre binomial se rétracte et on obtient un cône de l'incertitude plus étroit. A l'extrémum, une volatilité de zéro fait que l'arbre se referme sur lui-même et l'actif garde la même valeur à travers le temps (figure 17). On retrouve à cet instant un modèle classique d'analyse des cash-flows (ou l'analyse coûts-bénéfices), qui n'est finalement qu'un cas particulier d'un arbre binomial où la volatilité du projet ou de l'actif est considérée zéro dans un environnement déterministe.

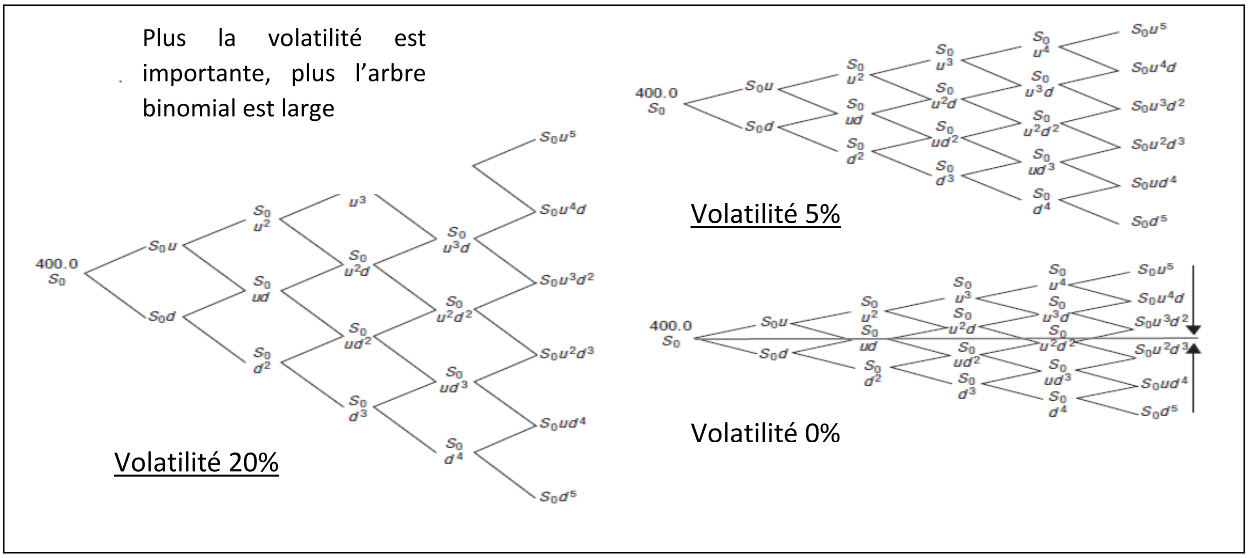


Figure 17 : Effet de la volatilité sur l'arbre binomial
Source : Mun, 2005

3. Références bibliographiques

- G. Barone-Adesi, R. E. Whaley (1987), « Efficient analytic approximation of american option values », *The journal of finance*, volume 42, Issue 2, p.301-320.
- P. Bjerksund, G. Stensland (2006), « Closed form spread option valuation », Department of Finance, NHH Helleveien 30, N-5045 Bergen, Norway, p.2-7.
- F. Black, M. Scholes (1973), « The pricing of options and corporate liabilities », the Journal of Political Economy, vol.81, N°3, p.637-654.
- F. Black (1976), « The pricing of commodity contracts », *Journal of Financial Economics*, vol.3, pp. 167-179.
- R.A. Brealey et *al*. (2011), *Principles of corporate finance*, tenth edition, Mc Graw-Hill Irwin, New York, p.240-267,502-554.
- J. Mun (2005), *Real Options Analysis : Tools and Techniques for Valuing Strategic Investments and Decisions*, Second Edition, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.
- J. Mun (2006), *Modeling risk : Applying Monte Carlo Simulation, Real Options Analysis, Forecasting, and Optimization Techniques*, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.
- R. Razgaitis (2003), *Using real options and Monte Carlo Analysis*, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.
- S. Roman (2004), *Introduction to the Mathematics of Finance*, Springer, California, p.239-303.
- P. Wilmott (2006), *Paul Wilmott on Quantitative Finance*. Second edition, John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey.
- W. Winston, T. Reilly (2015), *Financial models using simulation and optimisation*. Volume 1, 4th edition, Palisade, New York.
- W. Winston (2015), *Financial models using simulation and optimisation*. Volume 2, 4th edition, Palisade, New York.
- W. Whitt (2011), *Brownian Motion, Martingales and Stopping Times*. IEOR 4106, Spring.