



Munich Personal RePEc Archive

FORECASTING THE AGE SPECIFIC MORTALITY RATES FOR THE ALGERIAN POPULATION

Flici, Farrid

Research Center in Applied Economics for Development

June 2016

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/98784/>

MPRA Paper No. 98784, posted 26 Feb 2020 14:19 UTC

Projection des taux de mortalité par âges pour la population algérienne

Farid FLICI*

(*) Centre de Recherche en Economie Appliquée pour le Développement CREAD. BP. 197, Rue Djamel Eddine El-Afghani, Rostomia, Bouzareah, 16011 Alger, Algérie. Phone : +213 23 18 00 88, Fax : +213 23 18 00 87, E-mail : farid.flici@cread.dz

Résumé : La tarification des rentes viagères ainsi que les projections de populations nécessitent de projeter les taux de mortalité par âges dans le futur. En Algérie, les projections de la mortalité restent encore basées sur la méthodologie des Nations Unies qui demeure fortement recommandé lorsque les données nationales font défaut. Malgré les insuffisances, les tables nationales sont disponibles à partir de 1977. L'idée du présent papier est de fournir des projections de la mortalité à l'horizon 2050 basées sur les données nationales en utilisant le modèle de Lee-Carter.

Mot-clés : Taux de mortalité, projection, Lee-Carter, ajustement, Algérie.

Codes JEL: J11, C22, B55.

Introduction

La projection des taux de mortalité est un exercice essentiel pour plusieurs calculs socioéconomiques. Le provisionnement des rentes viagères, le pilotage des régimes de retraite par capitalisation ainsi que les projections démographiques nécessitent de projeter les taux de mortalité par âge dans le futur. Certaines applications, en revanche, nécessitent une formulation par âges unitaires. Aussi, la projection de certaines catégories de population telles que la population scolarisable par cycle scolaire (6-11, 12-15, 16-18), la population à l'âge de travailler (18-59) est plus facilement déductible à partir de projections par âges unitaires. De l'autre côté, les calculs actuariels sont généralement établis sur la base de taux de mortalité par âges détaillés (Flici, 2016a).

Jusqu'à présent, les projections de la mortalité fournies par les institutions publiques dans le cadre des projections démographiques (MF, 2016 ; ONS, 2017) ou même celles élaborées par les académiciens (Salhi, 2016 ; Hamza-Cherif, 2016) restent largement basées sur la méthodologie des Nations Unies. Les scénarios d'évolution future de l'espérance de vie à la naissance sont inspirés de ceux suggérés par les Nations Unies ; le schéma des taux de mortalité par âges sont par la suite déduits sur la base des tables types de mortalité en choisissant le type et le niveau de mortalité correspondant à un niveau donné de l'espérance de vie à la naissance. Cette procédure, même si elle semble être très pratique notamment en cas d'insuffisance de données nationales, elle donne lieu à des résultats qui restent très peu adaptés à la réalité. Les projections élaborées par l'ONS en 2004 (ONS, 2004) montrent les limites de cette méthodologie. En la disponibilité de données nationales de mortalité publiées par l'ONS depuis 1977, l'utilisation des modèles prospectifs de mortalité est censée assurer des projections plus robustes et des résultats très adaptés aux besoins des calculs socio-économiques.

Dans la littérature, plusieurs modèles ont été proposées pour projeter les taux de mortalité. Le modèle de Lee-Carter (LC) (Lee and Carter, 1992) en représente le plus utilisée. L'idée de ce modèle consiste à décomposer la surface des logarithmes des taux de mortalité observés en trois composantes par la technique de décomposition en valeurs singulières, deux sont liées à l'âge et une au temps. Ainsi, le processus de projection de la surface de mortalité se réduit à l'extrapolation de la composante temporelle par des techniques de séries temporelles. Par la suite, plusieurs autres contributions ont tenté de proposer d'autres versions au modèle LC afin d'améliorer sa qualité d'ajustement et sa capacité prédictive.

Renshaw and Haberman (2006) ont proposé d'inclure l'effet de génération au modèle LC. Currie (2006) a proposé le modèle APC (Age-Period-Cohort). Comparativement au modèle de Renshaw-Haberman, le modèle APC suppose que la sensibilité de la mortalité par âge aux variations des composantes temporelle et générationnelle est identique pour tous les âges.

Une nouvelle approche de projection des taux de mortalité a été initiée par Cairns et al. (2006). Le modèle Cairns-Blake-Dowd (CBD) est basé sur la régularité de l'allure des courbes de mortalité à partir d'un certain âge pour une année calendaire (généralement 30 ou 40 ans). Une transformation de type Logit amène à une forme qui peut être assimilée à une droite. Ainsi, la surface de mortalité historique peut être traitée comme une succession de droites sur une échelle de temps. L'extrapolation de la série des paramètres de ces droites ; pente et valeur centrale, conduit à reconstituer la surface de mortalité projetée. Plusieurs adaptations ont été par la suite proposées au modèle CBD telle que l'introduction d'un effet quadratique afin de mieux reproduire la courbure des Logit des taux de mortalité, l'effet de génération (Cairns et al., 2009) ou encore l'effet quadratique combiné avec l'effet de génération.

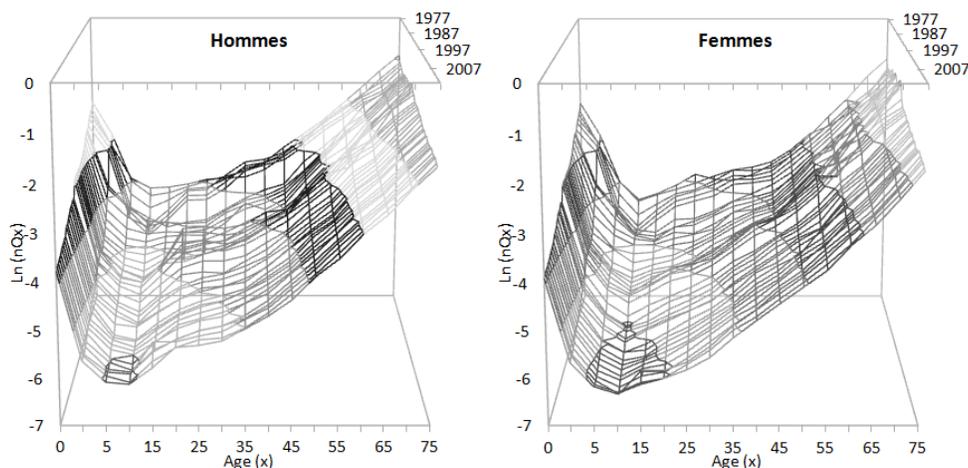
Loin d'aborder une comparaison entre ces différents modèles, nous nous contentons dans ce papier à l'application du modèle LC qui reste encore largement utilisé pour la projection de la mortalité. Toutefois, il est nécessaire de se baser sur d'autres critères de validation outre que la qualité de l'ajustement pour pouvoir affirmer la performance de ce modèle sur les données algériennes.

Données

Source de données

L'utilisation des modèles prospectifs de mortalité nécessitent la disponibilité d'une surface de mortalité rectangulaire pour un historique assez long pour pouvoir obtenir des projections robustes. Les données démographiques de l'Algérie sont publiées annuellement par l'Office National des Statistiques (ONS). La première table de mortalité algérienne basée sur les données d'état civil a été publiée en 1977. Jusqu'à 1997, l'ONS n'a pas pu assurer une périodicité annuelle dans la publication de telles statistiques. De ce fait, nous disposons d'une surface de mortalité, par groupes d'âges quinquennaux et par sexe, allant de 1977 à 2014. Les tables manquantes dans la surface et celles qui ont été fermées avant l'âge de 80 ans ont été estimées par Flici (2014). Les surfaces de mortalité ainsi obtenues sont présentées par la Figure 1.

Figure 1 : Surface des quotients de mortalité $\ln({}_nQ_{xt})$



Source: *Rétrospective des statistiques démographique de l'ONS* (ONS, 2012), *Publications annuelles* (ONS, 2013; 2014; 2015). Données manquantes estimées par Flici (2014).

A partir de la Figure 1, nous constatons que la mortalité masculine est légèrement supérieure à la mortalité féminine toute en ayant des formes générales similaires marquées par une mortalité infantile importante est des chutes brusques des niveaux de mortalité presque à tous les âges en 1983 et 1998. Ces changements brusques ont été déjà évoqués par Flici and Hammouda (2014). Les auteurs ont imputé le changement de 1983 à l'actualisation des facteurs de correction des données brutes de mortalité de l'effet du sous-enregistrement. Celui de 1998, par contre, est supposé être dû à la combinaison de trois effets : la deuxième révision des facteurs de correction, l'adoption des données du recensement de 1998 comme base d'estimation de la population par âges, et la fin de la décennie du terrorisme à partir de 1999.

Interpolation des taux de mortalité par âges détaillés

Les données et les indicateurs démographiques sont parfois présentés de façon agrégée. Certains calculs actuariels et démographiques sont basés sur une description par âges détaillés. L'éclatement des effectifs (décès, populations) ou des probabilités d'événement démographiques d'un groupe d'âge quinquennal vers des âges unitaires peut se faire en utilisant différentes méthodes comme celle de Karup-King, Lagrange ou Sprague. Ainsi, les taux interpolés peuvent facilement en être déduits. Ici, nous reprenons les résultats de Flici (2016b). L'interpolation est basée sur une jonction de la courbe des probabilités de décès réalisée avec la méthode de Lagrange et qui est plus adaptée aux bas âges, et la courbe interpolée par la méthode de Karup-King qui se trouve plus adaptée aux âges élevés.

Conversion des quotients en taux de mortalité

Après interpolation, nous disposons des quotients de mortalité par âges détaillés (q_{xt}) pour x allant de 0 à 79 ans et t de 1977 à 2014. Le modèle LC se trouve mieux adapté à l'ajustement et à l'extrapolation des taux de mortalité (m_{xt}) plutôt que les probabilités de décès (q_{xt}). La déduction de l'un à partir de l'autre peut se faire à l'aide de l'approximation de Kimball (Kimball, 1960):

$$m_{xt} = \frac{2 * q_{xt}}{2 - q_{xt}}$$

Ajustement de la surface brute de mortalité

Présentation du modèle de Lee-Carter

Le modèle LC consiste en une méthode d'extrapolation de la tendance historique de la mortalité dans le futur. La modélisation retenue pour le taux de mortalité est la suivante (Lee and Carter, 1992):

$$\ln(m_{xt}) = \alpha_x + \beta_x * \kappa_t + \varepsilon_{xt}$$

où :

- m_{xt} : taux de mortalité à la date t pour l'âge x ;
- α_x : comportement moyen des $\ln(m_{xt})$ au cours du temps ;
- κ_t : indice d'évolution générale de la mortalité ;
- β_x : sensibilité de la mortalité à l'âge x par rapport à l'évolution générale de la mortalité ;
- ε_{xt} est un terme d'erreur supposé suivre une loi Normale (0, $\delta\varepsilon$) ;

L'estimation des paramètres du modèle se fait en respectant les contraintes d'identifiabilité:

$$\sum_t \kappa_t = 0; \quad \text{et} \quad \sum_x \beta_x = 1$$

Estimation des paramètres du modèle de Lee-Carter

Le paramètre alpha représente la moyenne par âge des $\ln(m_{xt})$:

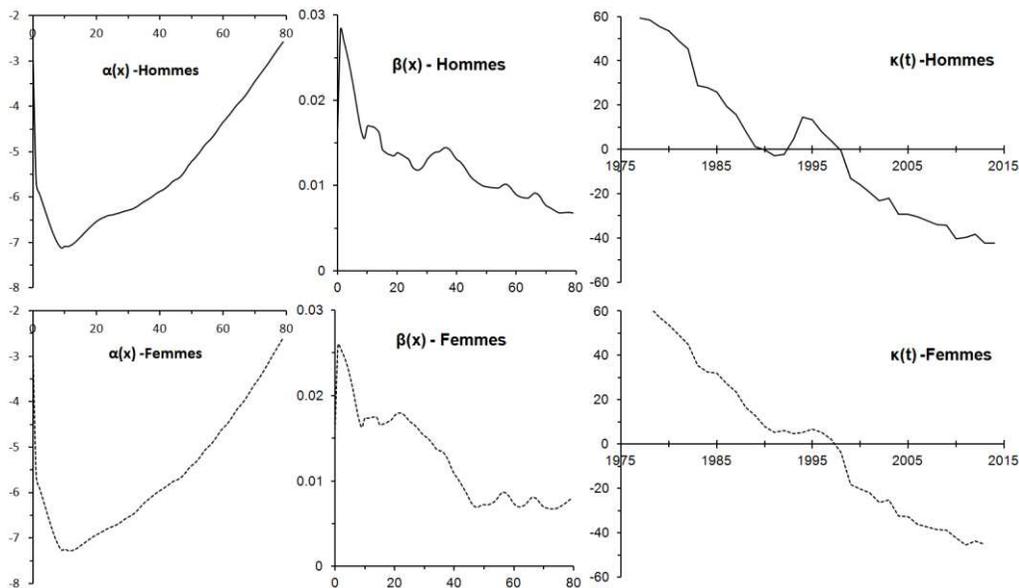
$$\alpha_x = \frac{1}{t_M - t_m + 1} \sum_{t=t_m}^{t_M} \ln(m_{xt})$$

L'étape suivante consiste en la décomposition de la matrice résiduelle en deux vecteurs liés à l'âge (beta) et au temps (kappa): $\ln(m_{xt}) - \alpha_x \approx \beta_x * \kappa_t$. Dans le papier original de Lee and Carter (1992), les auteurs ont proposé d'utiliser la méthode de « décomposition en valeurs singulières » pour effectuer cette décomposition. Dans notre cas, nous utilisons Excel Solver (Flici, 2016a) pour résoudre le problème qui vise à minimiser la somme des résidus carrés entre taux observés et taux prédits par le modèle:

$$\text{Min}A = \sum_{x=0}^{79} \sum_{t=1977}^{2014} [\ln(m_{xt}) - \alpha_x - \beta_x * \kappa_t]^2$$

Comme proposé par Renshaw and Haberman (2003), le paramètre alpha sera re-estimé dans le même processus d'optimisation afin d'améliorer la qualité de l'ajustement. Les résultats d'estimation sont présentés à la Figure 2.

Figure 2 : Résultats d'estimation des paramètres du modèle de Lee-Carter



Pour le paramètre α_x , les courbes masculine et féminine sont marquées par un niveau de mortalité infantile relativement important, une bosse aux jeunes âges ; plus apparente chez les hommes que chez les femmes, et une tendance régulière à partir de 45 ans.

Quant au paramètre β_x , il affiche approximativement le même comportement chez les deux populations. Ce paramètre se trouve à son niveau le plus important vers l'âge de 1 an et décroît ensuite avec l'âge tout en montrant une augmentation entre 20 et 40 ans relativement à sa tendance générale.

La composante temporelle de la mortalité κ_t affiche globalement la même tendance chez les deux populations. L'augmentation de la mortalité relative à la décennie noire [1992, 1998] est communément observée pour les hommes et les femmes.

Extrapolation de la tendance temporelle

Modèles usuels d'extrapolation

Dans Lee and Carter (1992), la composante temporelle de mortalité a été projetée à l'aide d'une marche aléatoire avec dérive ARIMA(0,1,0) :

$$\kappa_t = \kappa_{t-1} + d + \varepsilon_t$$

Avec d comme dérive et ε_t comme terme d'erreur spécifique à l'année t .

Ce modèle reste toujours applicable et assure encore une bonne qualité de projection (Cairns et al., 2011 ; Dowd et al., 2011; Zhou et al., 2013). Dans d'autres travaux, d'autres modèles de séries temporelles ont été tentés afin d'améliorer la qualité de la projection. Un modèle auto régressif d'ordre 1 (AR(1)) a été proposé et utilisé dans ce sens :

$$\kappa_t = d_1 + d_2 * \kappa_{t-1} + \varepsilon_t$$

Avec d_1 comme dérive et d_2 comme pente d'évolution annuelle de κ_t .

Quand le modèle n'est pas stationnaire en lui-même, la projection peut se faire par différentiation en utilisant un modèle ARIMA(1,1,0) :

$$\kappa_t - \kappa_{t-1} = d_1 + d_2 * (\kappa_{t-1} - \kappa_{t-2}) + \varepsilon_t$$

Yang and Wang (2013) ont utilisé un modèle combiné d'un ARIMA(1,1,0) et d'un modèle autorégressif de 1er ordre pour extrapoler la tendance temporelle de la mortalité:

$$\kappa_t = \kappa_{t-1} + d_1 + d_2 * \kappa_{t-1} + d_3 * (\kappa_{t-1} - \kappa_{t-2}) + \varepsilon_t$$

D'autres approches ont été parallèlement développées par la Division de la Population des Nations Unies et qui proposent des projections basées sur l'évolution attendue de l'espérance de vie à la naissance. Après extrapolation de la série de l'espérance de vie dans le futur en considérant l'avis d'experts, l'évolution des taux de mortalité par âge en est déduite à la base d'un modèle LC (Li and Gerland, 2011).

Les changements brusques dans la tendance historique de la mortalité posent souvent problème lorsque l'on essaie de faire une extrapolation à l'aide des modèles de séries temporelles. Certains ont proposé d'éliminer les points de turbulence lors de l'extrapolation (Bell, 1997), comme d'autres ont suggéré de n'utiliser que la tendance récente qui est généralement plus régulière. Cohelo and Nunes (2011) ont proposé d'utiliser les modèles de changements structurels pour traiter ce genre de problèmes.

Quand les projections sont faites en séparant les deux sexes, l'utilisation de modèles mathématiques simples peut conduire à une sorte d'incohérence lorsqu'on compare les résultats par sexe. La notion de « Coherent forecasting » fut son apparition pour englober un ensemble de méthodes visant à réduire les incohérences par sexe (Li and Lee, 2005 ; Hyndman et al., 2013).

En ce qui concerne le cas de la population algérienne, Flici (2016a) a essayé de projeter la composante temporelle de la mortalité observée entre 1977 et 2009 pour les âges de 60 à 80 ans en utilisant un modèle ARIMA(0,1,0) qui a abouti à des résultats satisfaisants.

Résultats d'extrapolation

Dans ce papier, quatre modèles sont évalués et comparés : ARIMA(0,1,0), AR(1), ARIMA(1,1,0) et ARIMA(1,1,0)+AR(1) nommés respectivement A1, A2, A3 et A4. Le choix du modèle adéquat est initialement orienté vers la minimisation de la moyenne des résidus carrés.

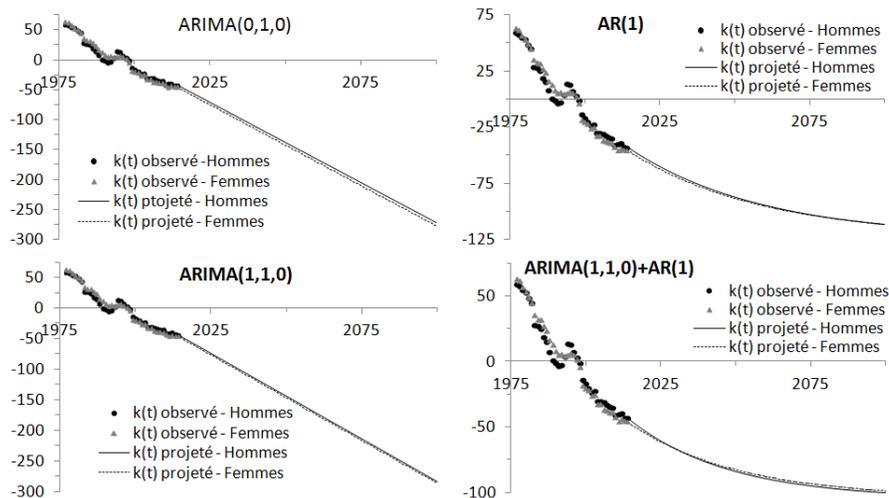
La série des κ_t présente, et pour les deux sexes, une augmentation durant la période de terrorisme (les années 90). Du moment qu'il s'agit d'effets conjoncturels qui ne sont pas censés avoir des répercussions sur la tendance à long terme de la mortalité, la période [1992, 1998] n'était pas prise en considération dans le processus d'extrapolation ainsi que l'année 1983 qui comporte un changement de niveau très significatif.

Les résultats finaux sont représentés dans la Table 1 et la Figure 3.

Table 1: Résultats d'estimation des modèles d'extrapolation de κ_t

	Hommes				Femmes			
	ARIMA		ARIMA (1,1,0) +		ARIMA		ARIMA (1,1,0) +	
	(0,1,0)	AR(1)	(1,1,0)	AR(1)	(0,1,0)	AR(1)	(1,1,0)	AR(1)
d1	-2,6758	-2,7154	-3,1219	-4,3812	-2,6980	-2,7154	-3,0359	-4,3812
d2		0,9779	-0,1169	0,5554		0,9779	-0,0845	0,5554
d3				0,4028				0,4028
MEC	6,1	5,7	6,3	6,0	4,6	3,8	4,8	3,5

Figure 3: Extrapolation de la composante temporelle de la mortalité κ_t



La comparaison de la moyenne des erreurs carrées (MEC) tend en faveur des modèles A2 et A4 pour les deux populations. D'après les résultats, une sorte d'incohérence par sexe a été observée avec les modèles (A2) et (A4), malgré que leurs qualités d'ajustement est meilleure que celles des modèles (A1) et A(2). Afin d'assurer une certaine cohérence dans la projection, un seul modèle a été estimé pour les deux sexes (uniquement pour A2 et A4). L'estimation de ces modèles a été orientée vers la minimisation de MEC. Cette procédure est supposée améliorer la cohérence des projections par sexe.

Les modèles A1 et A3 conduisent à des résultats approximatifs du point de vue de la trajectoire à long terme de la projection qui peut être assimilée à une tendance linéaire. Les modèles A2 et A3 donnent lieu à une tendance baissière décélérant. Les trajectoires obtenues sous les deux modèles se trouvent quasiment proches. Vu la différence en terme de nombre de paramètres, le modèle A2 est préférable. De même, l'estimation des intervalles de confiance de la projection est moins compliquée.

Risque d'erreur de la projection

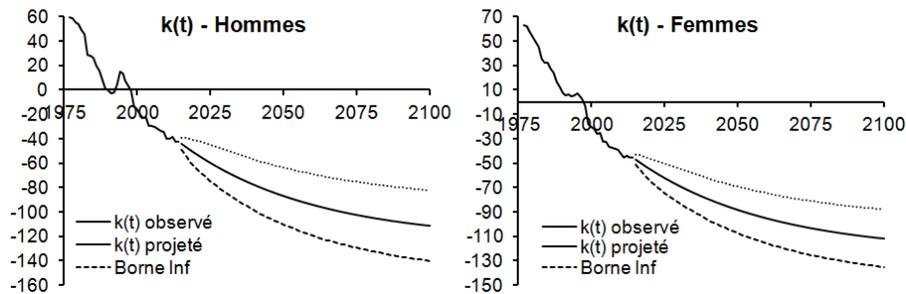
Les bandes de confiance prennent en compte des erreurs d'ajustement de la série historique et de les projeter parallèlement à la série initiale. La source d'erreurs dans le modèle LC peut provenir des trois paramètres du modèle, et le risque d'erreur global du modèle est réellement constitué par la combinaison des trois sources de risques. Sauf que, et du fait que seul le paramètre k_t soit le seul paramètre extrapolable dans le modèle, il représente la source de risque d'erreur la plus importante. Pour un modèle AR(1), l'intervalle de confiance à 95% à un horizon de « s » années se calcule par la formule suivante :

$$\kappa_{t+s} = \bar{s}_{t+h} + \xi_{t+s}$$

$$\xi_{t+s} = \sum_{i=1}^s d_2^{s-i} \cdot \varepsilon_i$$

Le résultat de calcul de la bande de confiance pour les κ_t projetés sont donnés en Figure 4.

Figure 4 : Intervalles de confiance (95%) des κ_t projetés



La tendance à long terme de mortalité est le résultat de la réalisation d'un ensemble de conditions. La prise en charge sanitaire des différentes catégories de la population ainsi que le développement socio-économique du pays représentent les éléments qui influent le plus sur le rythme de réduction de la mortalité à tous les âges.

Extrapolation de la mortalité aux grands âges

En l'absence de données fiables et régulières aux grands âges, les taux de mortalité au delà de 80 ans sont généralement extrapolés en utilisant des modèles spécifiques. Pendant longtemps, ces modèles ont consisté simplement aux modèles d'ajustement de la mortalité aux âges adultes (Gompertz, 1825 ; Makeham, 1860 ; Helligman and Pollard, 1980 ; Perks, 1932... etc.). A titre d'exemple, une fonction-type de Makeham a été utilisée pour extrapoler les taux de mortalité des tables-types des Nations Unies en 1981 (United Nations Organization, 1981) ; de même, le modèle de Gompertz a été utilisé pour extrapoler les taux de mortalité jusqu'à 100 ans dans la version 1983 des tables types de Coale-Demeny (Coale et al., 1983). Cette approche repose essentiellement sur l'hypothèse que la mortalité aux grands âges est une continuité de l'allure de la courbe de mortalité observée aux âges adultes. Aussi, à partir de la fin des années 80, et avec l'augmentation de la population des personnes âgées de 80 ans et plus et l'augmentation de l'espérance de vie à 80 ans, il était devenu envisageable d'étudier la mortalité aux âges élevés du fait que les données sont devenues disponibles pour certains pays développés. L'étude de l'évolution des taux de mortalité aux grands âges qui en a résulté a montré les limites des modèles de mortalité classiques pour décrire l'évolution de la mortalité aux grands âges (Kannisto, 1992). Certains, ont évoqué pour la première fois le phénomène de décélération des taux de mortalité aux grands âges

selon lequel, à partir d'un certain âge, les taux de mortalité continuent à progresser mais à un rythme de plus en plus réduit.

Coale and Guo (1989) ont proposé un modèle qui part du principe de la décélération des taux de mortalité à partir de l'âge de 75 ans suivant une tendance linéaire. La courbe des taux de mortalité qui en résulte prend une forme quadratique. L'idée du modèle est basée sur la variation des taux de mortalité entre 75 et 80 ans noté k_{80} :

$$k_{80} = \ln [{}_5m_{80} / {}_5m_{75}]$$

Entre deux groupes d'âge consécutifs, la variation baisse constamment d'une valeur R :

$$k_{x+5} = k_x - R$$

Autrement, ce taux d'évolution des taux de mortalité suit une tendance linéaire avec l'âge :

$$k_{80+5*i} = k_{80} + i * R$$

Ceci conduit à la formulation suivante des taux de mortalité au-delà de 80 ans:

$${}_5m_{80+5*i} = {}_5m_{75} * \exp \left(i * k_{80} - \frac{i(i+1)}{2i} \right) \text{ avec } i = 1, 2, 3, \dots$$

Cette formule a été initialement utilisée pour extrapoler les taux de mortalité quinquennaux jusqu'à 110. Afin d'éviter toute défaillance du modèle aux âges les plus avancées, une contrainte a été arbitrairement imposée par les auteurs :

$${}_5\hat{m}_{105} - {}_5m_{75} = 0,66$$

Ce modèle a été repris par Coale and Kisker (1990) qui l'appliquent sur des taux de mortalité par âge. La nouvelle formule d'extrapolation est la suivante :

$$m_x = m_{x-1} * \exp(k_{80} + s * (x - 80)) \text{ pour } x \geq 80$$

$$\text{Avec } k_{80} = \ln \left[\frac{m_{80}}{m_{65}} \right] \text{ et } s = - \frac{\ln \left[\frac{m_{79}}{\hat{m}_{110}} \right] + 31k_{80}}{465}$$

Une contrainte de fermeture a été imposée :

$$\hat{m}_{110} = \begin{cases} 0,8 & \text{pour les femmes} \\ 1 & \text{pour les hommes} \end{cases}$$

Les deux méthodes de Coale and Guo (1989) et de Coale and Kisker (1990) sont connues sous l'appellation du modèle Coale-Kisker. L'évolution des taux de mortalité selon cette méthode peut être décrite par un modèle quadratique et peut être exprimée sous la forme suivante (Flici, 2016b):

$$\ln(m_x) = a + bx + cx^2 + \varepsilon_{xt}$$

Kannisto (1992), en étudiant la tendance de la mortalité aux grands âges, parvient à conclure que le modèle logistique qui s'écrit usuellement sous la forme $\hat{m}_x = a + \frac{e^{bx}}{1+e^{bx}}$ peut être formulé ; pour les grands âges sous la forme :

$$\hat{m}_x = \frac{e^{bx}}{1 + e^{bx}}$$

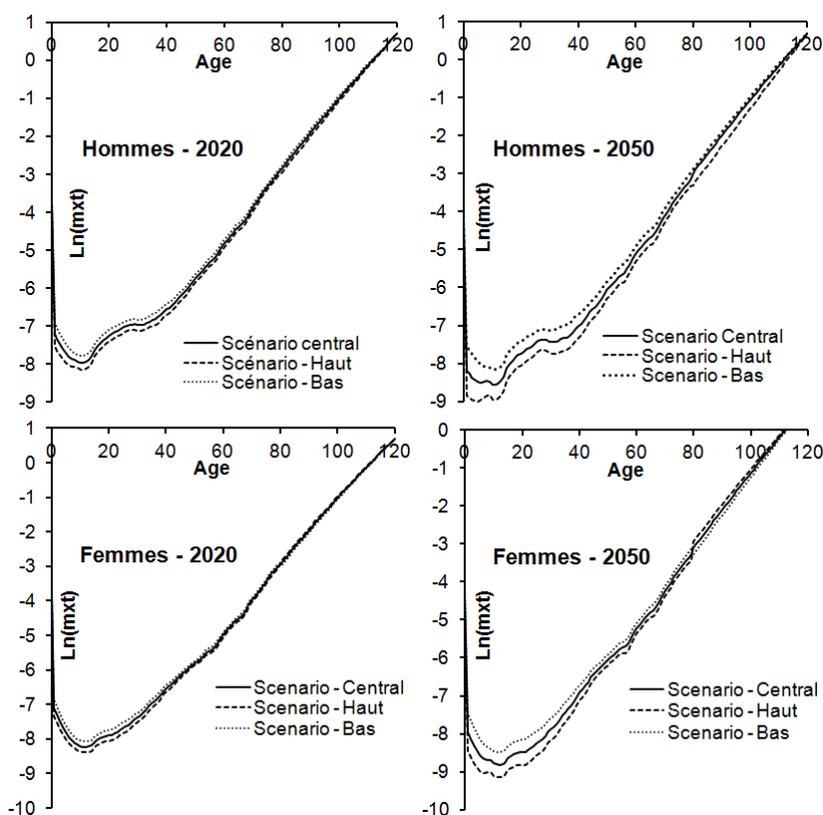
Denuit and Goderniaux (2005) ont proposé une méthode basée sur l'extrapolation des quotients de mortalité par une fonction quadratique :

$$\ln(\hat{q}_x) = a + bx + cx^2$$

Avec comme contrainte de fermeture : $\hat{q}_{130} = 1$.

Cette méthode a montré son efficacité comparativement aux modèles déjà cités (Quashie et Denuit, 2005). Une analyse comparative de ces modèles appliqués sur les données algériennes est présentée dans Flici (2016b).

Figure 5: Tables de mortalité extrapolées jusqu'à 120 ans projetées à l'horizon 2020 et 2050



Loin d'aborder une analyse comparative dans le cadre du présent travail, nous avons opté pour un modèle quadratique du type Coale-Kisker avec une contrainte de fermeture $\hat{q}_{120} = 1$. Un exemple de fermeture des tables masculine et féminine des années 2020 et 2050 est présenté dans la figure 5.

Le choix de 120 ans comme âge limite de survie est justifié par l'âge maximal de survie observé dans les résultats de l'Enquête MICS1 IV. L'exploitation des résultats de cette enquête a permis d'observer des survivants à l'âge de 112,5 ans pour les femmes et de 110,5 ans pour les hommes (Flici et Hammouda, 2016). Loin d'affirmer une telle valeur comme un âge maximal de survie de la population algérienne, l'âge de 120 ans semble être une limite raisonnable dans l'attente d'une estimation plus précise. Cela prend aussi en considération les évolutions futures en la matière.

¹ Multi Indicators Cluster Surveys, Wave 4, <http://mics.unicef.org/>

Résultats de la projection

L'extrapolation des taux de mortalité par âges ainsi que l'extrapolation des taux de mortalité aux grands âges, nous ont permis d'obtenir une surface de mortalité complète de 0 à 120 ans par année d'âge projetés jusqu'à 2050 comme montré à la Figure 6.

Figure 6: Surface de mortalité extrapolée pour les hommes et pour les femmes 2008-2050

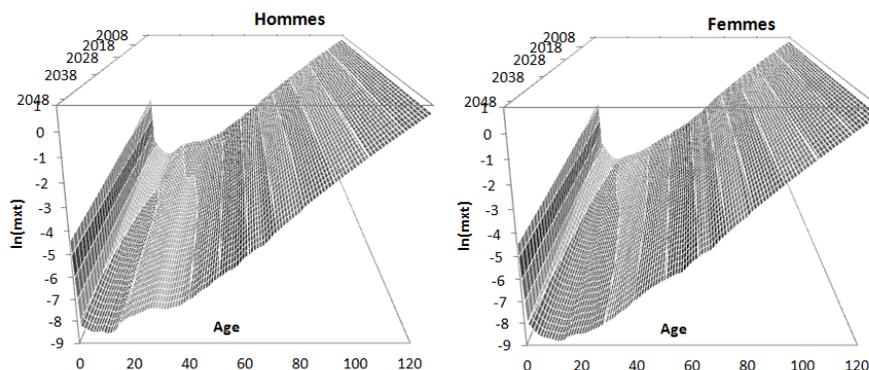
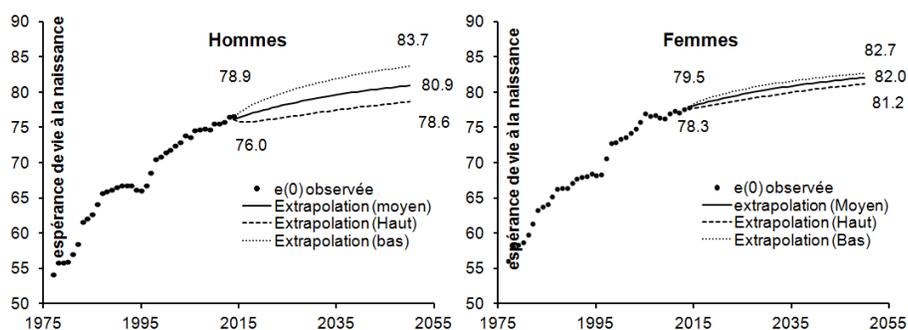


Figure 7 : Evolution de l'espérance de vie à la naissance selon les 3 scénarios



Partant de la projection de la trajectoire des taux de mortalité par âges, nous avons reconstruit l'évolution de l'espérance de vie à la naissance ainsi que leurs bandes de fluctuations (Figure 7).

Discussion des résultats de l'ajustement et de la projection

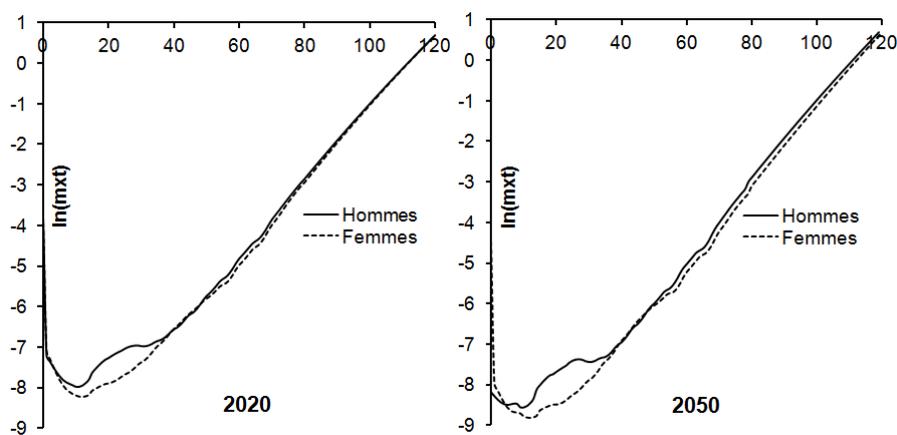
Le choix du modèle d'extrapolation ainsi que l'estimation de ses paramètres ont été orientés vers la maximisation de la fidélité du modèle à la série des données historiques. Malheureusement, une meilleure qualité d'ajustement n'assure pas nécessairement une meilleure capacité prédictive. Les erreurs de projection peuvent être engendrées par plusieurs sources : imperfection des données ; choix de la période à utiliser comme base d'extrapolation, choix du modèle adéquat (risque du modèle) ; risque d'estimation des paramètres (risque paramétrique)...etc.

Afin de réduire le risque d'erreurs dans la projection, ou au moins réduire l'intervalle d'erreurs et éviter les erreurs aberrantes, plusieurs indicateurs ont été proposés pour parfaire la procédure d'estimation et de projection : régularité des surfaces extrapolées, la mortalité différentielle par sexe, ...etc. Ici, la régularité des surfaces projetées est évidente comme montré dans la Figure 6, il reste à évaluer la cohérence de la projection.

L'ajustement à l'aide d'un modèle paramétrique (Lee-Carter par exemple) tente de réduire la matrice des taux de mortalité à un nombre réduit de paramètres. Cette procédure, même si elle permet de réduire le nombre de paramètres de $X \cdot T$ à $2X+T$ et facilite ainsi la procédure d'extrapolation, entraîne une perte d'information. La procédure d'estimation est orientée à minimiser cette perte d'information mais ce n'est pas toujours évident d'avoir le même niveau de fidélité à tous les âges et pour toutes les années, et quelques défaillances peuvent être observées notamment lorsque ces paramètres sont utilisés pour des fins d'extrapolation sans prendre l'avis d'expert en considération.

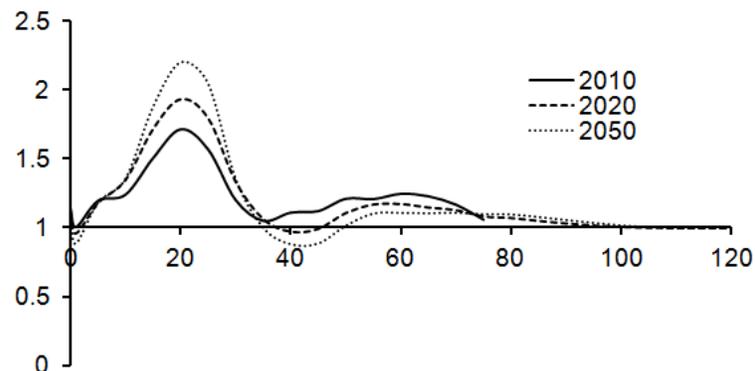
Aussi, lorsque les taux de mortalité sont estimés indépendamment pour les hommes et les femmes, il est nécessaire de vérifier la cohérence des résultats obtenus à l'horizon de la projection. Une comparaison basée sur les $\ln(m_{xt})$ masculins et féminins à l'horizon 2020 et 2050 (Figure 8) permet de déceler une sorte de juxtaposition des courbes masculine et féminine entre 30 et 50 ans.

Figure 8 : Courbe des taux de mortalité par sexe pour 2020 et 2050



L'un des indicateurs qui peuvent être utilisés pour évaluer une projection du point de vue de la cohérence par sexe est bien le rapport des taux de mortalité par sexe (RTMS). La Figure 9 visualise une comparaison des RTMS observé en 2010 avec ceux projetés pour 2020 et 2050.

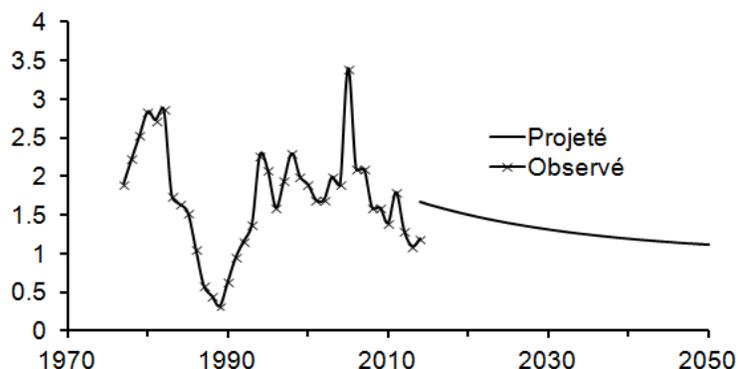
Figure 9 : Rapport des taux de mortalité par sexe (2010, 2020, et 2050)



Le RTMS issu de la projection affiche des différences significatives entre hommes et femmes en termes de mortalité par âges ainsi que son évolution future. Selon la figure 9, les taux de mortalité des jeunes de moins de 35 ans vont se réduire moins rapidement chez les hommes que chez les femmes. Cependant, l'inverse est observé au-delà de 35 ans ou une surmortalité féminine est prédite pour certains âges (38-40) par notre projection.

Malgré cela, l'évolution comparée de l'espérance de vie à la naissance semble être régulière et conforme aux normes d'évolution de l'espérance de vie différentielle entre hommes et femmes.

Figure 10 : Ecart en espérance à la naissance



Comme montré dans la Figure 10, avec l'amélioration du niveau de l'espérance de vie à la naissance, la différence entre les deux sexes tend à baisser. Ainsi, l'évolution de l'écart en espérance de vie à la naissance va poursuivre sa tendance générale à la baisse durant les années à venir pour passer de 1.5 en 2015 à 1 en 2050.

Conclusion

L'intérêt et l'utilité de la projection des taux de mortalité par âges sont plus évidents lorsque l'on envisage de faire une projection de la population par la méthode des composantes ou lorsqu'on essaie de provisionner un portefeuille de rentes viagères. Il est toutefois nécessaire d'adapter la méthodologie suivie par rapport à l'usage final des résultats. Nous avons vu à travers ce papier, une projection des taux de mortalité par âges établie sur des données de la population algérienne.

Le modèle de Lee-Carter, comme tout autre modèle de projection de la mortalité, nécessite la disponibilité d'un historique assez long et assez stable pour pouvoir faire une projection consistante. Les données algériennes sur la mortalité, même si elles couvrent une période de 38 ans (1977-2014), restent marquées par des perturbations qui amoindrissent la qualité de la projection et réduisent le choix des techniques qui peuvent y être appliquées. Il était impossible ou inopportun d'avoir des résultats satisfaisants sans exclure les données relatives à la décennie noire (1992-1998) du processus d'extrapolation. Cette procédure nous a permis d'améliorer la qualité de l'ajustement de la série historique par des modèles de séries temporelles mais tout en réduisant le nombre d'observations utilisées pour la projection. En l'absence de toute autre solution envisageable, et vu la régularité de la série utilisée au final, nous nous sommes contentés des résultats ainsi obtenus. Il nous faudra encore attendre quelques années, voire une ou deux décennies, pour pouvoir disposer d'une série à la fois assez longue et assez régulière permettant plus de flexibilité en matière de choix de modèles d'extrapolation.

La qualité d'ajustement n'a jamais été, en elle-même, un critère suffisant pour dire que la projection est de bonne qualité. C'est pour cela que nous avons fait appel à d'autres critères complémentaires. La régularité de la surface de mortalité projetée, le ratio des taux de mortalité par sexe ainsi que l'espérance de vie différentielle entre hommes et femmes ont été utilisés pour mieux cerner les insuffisances de la projection faite. Même si ces critères affichent des valeurs acceptables à l'horizon de la projection, l'observation des rapports des taux de mortalité par sexe affiche quelques défaillances. A partir de 2020 d'ailleurs, ce ratio devient inférieur à 1 autour de l'âge de 40 ans. La plage d'âge ainsi altérée ne cesse de prendre de l'ampleur autant qu'on s'éloigne dans le temps. Aussi, un problème lié à l'ajustement et non pas à l'extrapolation surgit et conduit à sur/(sous) estimer légèrement les taux de mortalité ajustés et

extrapolés. Les résultats sont donc à prendre avec précaution notamment du point de vue de la cohérence par sexe ou lorsqu'il s'agit de classe d'âge sensibles particulièrement la mortalité infantile ou même la mortalité à 10 ans qui sert comme valeur d'entrée des table-types de mortalité.

Il est nécessaire de tenter dans l'avenir à envisager des projections dites « cohérentes ». De même, il est nécessaire d'augmenter la précision de l'ajustement afin d'éviter la sur/ sous-évaluation des taux projetés.

References

Bell W.(1997) Comparing and Assessing time series methods for forecasting age specific demographic rates, *Journal of Official Statistics*, volume 13, 279-303.

Cairns A., Blake D. and Dowd K. (2006) A two-factor model for stochastic mortality: Theory and calibration, *Journal of Risk and Insurance*, volume 73, 687-718

Cairns A., Blake D., Dowd K., Coughlan G. and Epstein D. (2009) A Quantitative Comparison of Stochastic Mortality Models Using Data from England & Wales and the United States, *North American Actuarial Journal*, volume 13, n° 1, 1-35.

Cairns A., Blake D., Dowd K., Coughlan G., Epstein D. and Khalaf-Allah M. (2011) Mortality density forecasts: An analysis of six stochastic mortality models, *Insurance: Mathematics and Economics*, volume 48, n° 3, 355-367.

Coale A. J. and Kisker E. E. (1990) Defects in data on old-age mortality in the United States: new procedures for calculating mortality schedules and life tables at the highest ages, *Asian and Pacific Population Forum*, volume 4, 1-31.

Coale A. J., Demeny P. and Vaughan B. (1983) *Regional Model Life Tables and Stable Populations*, (Second Edition), New York/London: Academic Press.

Coale, A. J. and Guo, G. (1989). Revised Regional Model Life Tables at Very Low Levels of Mortality, *Population Index*, volume 55, n° 4, 613-643.

Coelho E. and Nunes L.C. (2011) Forecasting mortality in the event of a structural change, *Journal of the Royal Statistical Society: Series. Statistics in Society*, volume 174, n° 3, 713-736.

Currie I.D. (2006) Smoothing and forecasting mortality rates with P-splines. Talk given at the Institute of Actuaries (2006). <http://www.macs.hw.ac.uk/~iain/research/talks/Mortality.pdf>

Denuit M. and Goderniaux A. C. (2005) Closing and projecting life tables using log-linear models, *Bulletin de l'Association Suisse des Actuaries*, volume 1, 29-49.

Dowd K., Cairns A., Blake D., Coughlan G., Epstein D. and Khalaf-Allah M. (2011) A Gravity Model of Mortality Rates for Two Related Populations, *North American Actuarial Journal*, volume 15, n° 2: 334-356.

Flici F. (2014) Estimation of the missing data in the Algerian mortality surface by using an Age-time-segmented Lee-carler model, Conference paper, Stochastic Modeling Techniques and Data Analysis, Lisbon, Portugal (June).

Flici F. (2016a) Provisionnement des rentes viagères en Algérie entre approche statique et approche prospective, *Bulletin Français d'Actuariat*, volume 16, n° 31, 5-40.

Flici F. (2016b) Closing out the Algerian life tables: for more accuracy and adequacy at the older ages, Conference paper, International Association of Actuaries ASTIN Conference, Lisbon, Portugal (June).

Flici F. and Hammouda N.E. (2014) Review of half-century of mortality changes in Algeria: 1962-2012, Conference paper, Middle East Economic Association Conference, Tlemcen (Algeria).

Flici F. and Hammouda N.E. (2016) Analyse de la mortalité en Algérie à travers les résultats de l'enquête MICS IV, Rapport Technique, Ministère de la Santé, de la Population et de la Réforme Hospitalière, Alger, Algérie.

- Gompertz B. (1825) On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality and on a New Mode of Determining Life Contingencies, Royal Society of London, Philosophical Transactions, Series A, n° 115, 513-85.
- Hamza-Cherif A. (2016) Population et besoins sociaux essentiels en Algérie à l'horizon 2038, Editions Universitaire Européennes EUE, Allemagne, 320 p.
- Heligman L. and Pollard J. H. (1980) The Age Pattern of Mortality, Journal of the Institute of Actuaries, volume 107, 437-55.
- Hyndman R., Booth H. and Yasmeen F. (2013) Coherent mortality forecasting: the product-ratio method with functional time series models, Demography, volume 50, n° 1, 261- 283.
- Kannisto V. (1992) Workshop Old Age Mortality, Odense, June.
- Kimball A.W. (1960) Estimation of mortality intensities in animal experiments, Biometrics, volume 16, n° 4, 505- 521.
- Lee R. and Carter L. (1992) Modeling and Forecasting U. S. Mortality, Journal of the American Statistical Association, volume 87, n° 419, 659-671.
- Li N. and Gerland P. (2011) Modifying the Lee-Carter method to project mortality changes up to 2100, Annual Meeting of the Population Association of America.
- Li N. and Lee R. (2005) Coherent mortality forecasts for a group of populations: an extension of the Lee Carter method, Demography, volume 42, n° 3, 575-594.
- Makeham W. M. (1860) On the law of mortality and the construction of annuity tables, Journal of the Institute of Actuaries, volume 8, 301-310.
- Ministere DES Finance MF (2016) Projection Démographique de l'Algérie à l'horizon 2050, « Approche par le schéma de transition démographique », Direction Générale de la Prospective, Alger, Algérie, Novembre 2016.
- Office National des Statistiques ONS (2004) Projections de populations à l'horizon 2030, Collection statistiques Séries S : Statistiques Sociales, N°106, Alger, Algérie, Décembre 2004.
- Office National des Statistiques ONS (2017) Démographie Algérienne 2016, Série Statistique N° 779, la Direction Technique chargée des statistiques de Population et de l'Emploi, Alger, Algérie.
- Perks W. (1932) On some experiments on the graduation of mortality statistics, Journal of the Institute of Actuaries, volume 63, 12-40.
- Quashie A. et Denuit M. (2005) Modèles d'extrapolation de la mortalité aux grands âges, Working paper N° WP04-13, Institut des Sciences Actuarielles & Institut de statistique. Université Catholique de Louvain, Belgique.
- Renshaw A.E. and Haberman S. (2003) Lee–Carter mortality forecasting with age specific enhancement, Insurance: Mathematics and Economics, volume 33, n° 2, 255-272.
- Renshaw A.E. and Haberman S. (2006) A cohort-based extension to the Lee–Carter model for mortality reduction factors, Insurance: Mathematics and Economics, volume 38, n° 3, 556-570.
- Salhi M. (2016) Projection de la population et de l'emploi en Algérie, Revue des Sciences Sociales, volume 4, 9-26.
- United Nations Organization UNO. (1981) Model Life Tables for Developing Countries, United Nations Publication, Sales No. E.1981.XIII.7.
- Yang S. S. and Wang C. W. (2013) Pricing and securitization of multi-country longevity risk with mortality dependence, Insurance: Mathematics and Economics, volume 52, n° 2, 157-169.
- Zhou R., Li J. S. H. and Tan K. S. (2013) Pricing standardized mortality securitizations: A two-population model with transitory jump effects, Journal of Risk and Insurance, volume 80, n° 3, 733-774.