



Munich Personal RePEc Archive

**Celebrating 60 Years of Rudolf E.  
Kálmán's and Piero Sraffa's Theories:  
Real-World Price Systems are Almost  
Uncontrollable**

Mariolis, Theodore and Veltsistas, Panagiotis

Department of Public Administration, Panteion University

14 April 2020

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/99648/>

MPRA Paper No. 99648, posted 04 May 2020 10:40 UTC

# Γιορτάζοντας τα 60 χρόνια των Θεωριών του Rudolf E. Kálmán και του Piero Sraffa: Τα Συστήματα Τιμών του Πραγματικού Κόσμου είναι Σχεδόν Μη-Ελέγξιμα

Θεόδωρος Μαριόλης & Παναγιώτης Βελτσίστας\*  
Τμήμα Δημόσιας Διοίκησης, Πάντειον Πανεπιστήμιο

Στο παρόν άρθρο εκτιμάται ο βαθμός και η τάξη της Kalman ελεγχσιμότητας των κατά Sraffa συστημάτων τιμών οικονομιών του πραγματικού κόσμου, χρησιμοποιώντας στοιχεία 172 πινάκων εισροών-εκροών από τις 43 χώρες της *World Input-Output Data Base*, 2000-2014. Τα ευρήματα δείχνουν ότι: (i) ο βαθμός ελεγχσιμότητας των συστημάτων τιμών είναι της τάξης του  $10^{-21}$  με  $10^{-18}$ , (ii) η σχετική αριθμητική τάξη της ελεγχσιμότητας είναι μεταξύ 7% και 18% (μεταξύ 4% και 9%), για επίπεδο ανοχής  $10^{-4}$  ( $10^{-2}$ ), και, επομένως, (iii) τα συστήματα τιμών είναι σχεδόν μη-ελέγξιμα. Αυτά τα ευρήματα εξηγούν, επίσης, τη μορφή των σραφφαϊανών εμπειρικών καμπυλών εμπορευματικών τιμών-ωρομισθίου-ποσοστού κέρδους, η οποία βρίσκεται στο επίκεντρο της θεωρίας του κεφαλαίου, και, έτσι, δείχνουν ότι η Σραφφαϊανή θεωρία δεν είναι μόνο η πιο γενική θεωρία, αλλά και προσφέρει στέρεη βάση για εμπειρική ανάλυση.

**Λέξεις-κλειδιά:** Λοξή κατανομή χαρακτηριστικών τιμών, Σραφφαϊανή θεωρία, Σχεδόν μη-ελέγξιμο σύστημα

## Celebrating 60 Years of Rudolf E. Kálmán's and Piero Sraffa's Theories: Real-World Price Systems are Almost Uncontrollable

Theodore Mariolis & Panagiotis Veltsistas  
Department of Public Administration, Panteion University

Using input-output data from the World Input-Output Database (172 Symmetric Input-Output Tables of 43 countries, spanning the period 2000-2014), this paper estimates the degree and rank of Kalman controllability of the relevant Sraffian price systems. The findings suggest that: (i) the degree of controllability is in the range of  $10^{-21}$  to  $10^{-18}$ ; (ii) for a tolerance of  $10^{-4}$  (of  $10^{-2}$ ), the relative numerical rank of controllability is in the range of 7% to 18% (of 4% to 9%); and, therefore, (iii) the price systems are almost uncontrollable. These findings also explain the specific shape features of the empirical price-wage-profit rate curves, which are at the heart of capital theory and, thus, show that the Sraffian theory is not only the most general one but also provides a sound empirical basis.

**Keywords:** Almost uncontrollable system; Skew characteristic value distribution; Sraffian theory

**JEL classifications:** B51, C32, C67, D46, D57

---

\* Τμήματα του παρόντος άρθρου έχουν παρουσιαστεί σε εργαστήρια του “Study Group on Sraffian Economics”, στο Πάντειον Πανεπιστήμιο (Μάιος 2019-Ιανουάριος 2020). Είμαστε υπόχρεοι στους Νικόλαο Ροδουσάκη και Γιώργο Σώκλη για χρήσιμες παρατηρήσεις και συζητήσεις.

## 1. Εισαγωγή

Επαρκώς μεγάλος όγκος εμπειρικών μελετών έχει δείξει ότι οι κατά Sraffa (1960) καμπύλες τιμών-χρηματικού ωρομισθίου-ποσοστού κέρδους εμφανίζουν, τόσο για σημαντικά ετερογενείς μεταξύ τους εθνικές οικονομίες όσο και κατά μήκος του χρόνου, τα ακόλουθα χαρακτηριστικά γνωρίσματα:

- (i). Οι καμπύλες εμπορευματικών τιμών-ποσοστού κέρδους:
  - (a). Δεν έχουν περισσότερα από ένα σημεία αλλαγής μονοτονίας, όταν τα χρηματικά μεγέθη μετρώνται σε όρους του Προτύπου εμπορεύματος του Sraffa.
  - (b). Είναι, στη σημαντική πλειονότητά τους, μονότονες παρά μη-μονότονες (80%, το λιγότερο, έναντι 20%, το περισσότερο).
- (ii). Ανεξαρτήτως του επιλεγέντος, από την/τον παρατηρητή, μέτρου μέτρησης (*numéraire*) των χρηματικών μεγεθών:
  - (a). Οι καμπύλες χρηματικού ωρομισθίου-ποσοστού κέρδους δεν εμφανίζουν πάνω από δύο σημεία καμψής.
  - (b). Οι συντελεστές γραμμικής συσχέτισης μεταξύ χρηματικού ωρομισθίου και ποσοστού κέρδους τείνουν να είναι μεγαλύτεροι από 99%.
- (iii). Η προσέγγιση όλων των ως άνω καμπυλών μέσω πολυωνυμικών εξισώσεων χαμηλής τάξης (δηλαδή, γραμμικών ή, *a fortiori*, τετραγωνικών) κρίνεται ως ικανοποιητική σε καθαρά ποσοτικούς όρους.

Είναι, επίσης, γνωστό ότι οι δυϊκές εμφανίσεις, αφενός, μη-μονότονων καμπυλών εμπορευματικών τιμών-ποσοστού κέρδους και, αφετέρου, καμπυλών χρηματικού ωρομισθίου-ποσοστού κέρδους μεταβαλλόμενης καμπυλότητας προβλέπονται και ερμηνεύονται από τη σραφφαϊανή θεωρία. Αντιθέτως, όχι μόνο είναι μη-προβλέψιμες από όλες τις άλλες θεωρίες (κλασική, μαρξι(στ)ική, αυστριακή, και νεοκλασική), αλλά και οδηγούν στην κατάρρευση αυτών των θεωριών. Οι μη-σραφφαϊανές θεωρίες θα ίσχυαν σε έναν κόσμο παραγωγής: (i) ενός και μοναδικού (απλού ή σύνθετου) εμπορεύματος, για το οποίο θα υπήρχε οποιοδήποτε πλήθος εναλλακτικών τεχνικών παραγωγής, ή (ii) δύο εμπορευμάτων και μίας και μοναδικής τεχνικής παραγωγής, ή, τέλος, (iii) οποιουδήποτε πλήθους ετερογενών εμπορευμάτων, όπου θα υπήρχε οποιοδήποτε πλήθος εναλλακτικών τεχνικών παραγωγής, και τα κέρδη θα ήταν, ωστόσο, μηδενικά.

Από την άλλη πλευρά, ωστόσο, τα ως άνω εμπειρικά ευρήματα υποδεικνύουν ότι οι εν λόγω δυϊκές εμφανίσεις δεν εκδηλώνονται εκτενώς στον πραγματικό οικονομικό κόσμο, πράγμα που θα πρέπει να χαρακτηριστεί ως *παράδοξο*, δεδομένου

ότι ο πραγματικός οικονομικός κόσμος είναι σύστημα: (i) παραγωγής μεγάλου πλήθους ετερογενών εμπορευμάτων, (ii) θετικών κερδών, (iii) εναλλακτικών τεχνικών παραγωγής, και (iv) πολύπλοκων διακλαδικών συνδέσεων.

Όπως αποδείχτηκε πρόσφατα (Mariolis, 2019), το παράδοξο θα λυνόταν εάν το κατά Sraffa σύστημα τιμών-χρηματικού ωρομισθίου-ποσοστού κέρδους των πραγματικών οικονομιών είχε πολύ χαμηλούς βαθμούς ελεγχιμότητας κατά Kalman (1960, 1982). Στο παρόν άρθρο εκτιμάται, λοιπόν, ο βαθμός της Kalman ελεγχιμότητας αυτών των συστημάτων, χρησιμοποιώντας στοιχεία 172 Συμμετρικών Πινάκων Εισροών-Εκροών (SIOTs) από τις 43 εθνικές οικονομίες της *World Input-Output Database*, 2000-2014:<sup>1</sup> Στην Ενότητα 2 εκτίθεται, εν συντομία και παρακάμπτοντας όλες τις αποδείξεις, το αναλυτικό πλαίσιο της μελέτης.<sup>2</sup> Στην Ενότητα 3 εκτίθενται τα ευρήματα. Τέλος, η Ενότητα 4 είναι συμπερασματική.

## 2. Αναλυτικό Πλαίσιο

Υπό τις συνήθεις υποθέσεις, το σραφφαϊανό σύστημα τιμών ενός κερδοφόρου συστήματος απλής (*single*) παραγωγής βασικών εμπορευμάτων είναι:<sup>3</sup>

$$\mathbf{p}^T = w\mathbf{I}^T + (1+r)\mathbf{p}^T\mathbf{A} \quad (1)$$

όπου το  $\mathbf{p}^T$  συμβολίζει το  $1 \times n$  διάνυσμα των τιμών, το  $w$  το χρηματικό ωρομισθίο, το  $\mathbf{I}^T$  το  $1 \times n$  διάνυσμα των εισροών σε άμεση εργασία, το  $r$  το ποσοστό κέρδους, και το  $\mathbf{A}$  τη μη-διασπώμενη  $n \times n$  μήτρα των τεχνικών συντελεστών, με  $\lambda_{A1} < 1$ .

Σε όρους «κάθετης ολοκλήρωσης» και «σχετικού ποσοστού κέρδους»,  $\rho \equiv rR^{-1}$ , όπου το  $R \equiv \lambda_{A1}^{-1} - 1$  συμβολίζει το «μέγιστο εφικτό ποσοστό κέρδους», η Εξ. 1 γράφεται ως

$$\mathbf{p}^T = w\mathbf{v}^T + \rho\mathbf{p}^T\mathbf{J} \quad (2)$$

όπου  $\mathbf{v}^T \equiv \mathbf{I}^T[\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ ,  $\mathbf{H} \equiv \mathbf{A}[\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ ,  $\mathbf{J} \equiv R\mathbf{H}$  και  $\lambda_{J1} = R\lambda_{H1} = 1$ .

Το δυναμικό, διακριτού-χρόνου, ανάλογο της Εξ. 2 είναι

$$\mathbf{p}_{t+1}^T = w_t\mathbf{v}^T + \rho^*\mathbf{p}_t^T\mathbf{J}, \quad t = 0, 1, \dots \quad (3)$$

<sup>1</sup> Βλέπε Timmer et al. (2015). Τα πρωτογενή στοιχεία μεταφορτώθηκαν από την ιστοσελίδα της WIOD: <http://www.wiod.org/release16>

<sup>2</sup> Για τις αποδείξεις, βλέπε Mariolis (2019).

<sup>3</sup> Η Perron-Frobenius (P-F) ιδιοτιμή μίας ημι-θετικής μήτρας  $\mathbf{A}$  θα συμβολίζεται ως  $\lambda_{A1}$ , ενώ οι μη-δεσπόζουσες ιδιοτιμές της θα συμβολίζονται ως  $\lambda_{Ak}$ ,  $k = 2, 3, \dots, n$ , όπου  $|\lambda_{A2}| \geq |\lambda_{A3}| \geq \dots \geq |\lambda_{An}|$ . Οι ιδιάζουσες τιμές (*singular values*) αυτής, θα συμβολίζονται με  $\sigma_{A1}$  και  $\sigma_{Ak}$ , αντιστοίχως.

όπου το  $\rho^*$  συμβολίζει το εξωγενώς δεδομένο ονομαστικό σχετικό ποσοστό κέρδους.

Τα συστήματα που περιγράφονται από τις Εξ. 2 και 3 καλούνται «πλήρως ελέγξιμα» ή, ισοδυνάμως, «ελέγξιμα τάξης  $n$ », όταν, και μόνο όταν, η τάξη της Krylov μήτρας τους

$$\mathbf{K} \equiv [\mathbf{v}, \mathbf{J}^T \mathbf{v}, \dots, (\mathbf{J}^T)^{n-1} \mathbf{v}]^T \quad (4)$$

ισούται με  $n$ . Αντιθέτως, όταν  $\text{rank}[\mathbf{K}] = m < n$ , καλούνται «μη-ελέγξιμα» ή, πιο συγκεκριμένα, «ελέγξιμα τάξης  $m$ ».

Η παρούσα προσέγγιση προσφέρει μόνο ένα κριτήριο του τύπου «ναι ή όχι» για την πλήρη ελεγχσιμότητα ενός συστήματος. Έτσι, τα μη-ελέγξιμα συστήματα είναι μέτρου μηδέν στο σύνολο όλων των συστημάτων ή, με άλλα λόγια, τα συστήματα είναι *σχεδόν πάντοτε* πλήρως ελέγξιμα (Kalman et al., 1963). Ωστόσο, όπως επισημαίνει ο Friedland (1986),

In the *real* world [...] it may not be possible to make such sharp distinctions. The problem with the standard definition of controllability [...] is that it can lead to discontinuous functions of the system parameters: an arbitrarily small change in a system parameter can cause an abrupt change in the rank of the matrix by which controllability [...] is determined. It would be desirable to have definitions which can vary continuously with the parameters of the system and thus can reflect the *degree of controllability* of the system. Kalman et al. (1963) recognized the need and suggested using the determinant of the corresponding test matrix [ $\mathbf{K}$ ] as a measure of the degree of controllability [...]. Friedland (1975), noting that basing the degree of controllability [...] on the determinant of the test matrix suffers from sensitivity to the scaling of the state variables, suggested using the ratio of the smallest of the singular values to the largest as a preferable measure. Moore (1981) subsequently elaborated upon this suggestion. (p. 220 – πρόσθετη έμφαση)

Η οριζόμενη στην Εξ. 4 Krylov μήτρα ελεγχσιμότητας μπορεί να εκφραστεί ως γινόμενο τριών μητρών:

$$\mathbf{K} = \mathbf{V} \hat{\omega} \mathbf{X}_J^{-1}$$

όπου το  $\mathbf{V} \equiv (\lambda_{j_j})^{i-1}$  συμβολίζει τη Vandermonde μήτρα των ιδιοτιμών της  $\mathbf{J}$ , το  $\hat{\omega}$  τη διαγώνια μήτρα που σχηματίζεται από τα στοιχεία του διανύσματος  $\omega^T \equiv \mathbf{v}^T \mathbf{X}_J$ , και το  $\mathbf{X}_J$  τη μήτρα (*modal matrix*) των δεξιών ιδιοδιανυσμάτων της  $\mathbf{J}$ . Επομένως, για την ορίζουσα της  $\mathbf{K}$  ισχύει

$$\det[\mathbf{K}] = \det[\mathbf{V}] \det[\hat{\omega}] \det[\mathbf{X}_J^{-1}] \quad (5)$$

όπου

$$\det[\mathbf{V}] = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_{ji} - \lambda_{ji}) \quad (6)$$

Ο βαθμός ελεγχιμότητας της οικονομίας ορίζεται ως

$$DC \equiv \sigma_{K_n} \sigma_{K_1}^{-1} \quad (7)$$

όπου  $0 \leq DC < 1$ . Όταν  $DC = 0$ , η οικονομία είναι μη-ελέγξιμη, ενώ στην αντίθετη περίπτωση είναι πλήρως ελέγξιμη. Ωστόσο, όταν η τιμή του  $DC$  είναι «πολύ μικρή», η ελεγχιμότητα της οικονομίας είναι «ασθενής» ή «φτωχή», και η οικονομία καλείται «σχεδόν μη-ελέγξιμη».

Τέλος, η αριθμητική τάξη (*numerical rank*),  $NR(\mathbf{K}, \tau)$ , της  $\mathbf{K}$  ορίζεται ως το πλήθος των ιδιοζουσών τιμών της  $\mathbf{K}$ , οι οποίες είναι μεγαλύτερες από  $\tau \sigma_{K_1}$ , όπου το  $\tau$  συμβολίζει μία θετική ανοχή. Έτσι, η αριθμητική τάξη ελεγχιμότητας,  $NRC$ , του συστήματος τιμών ορίζεται ως η αριθμητική τάξη της μήτρας Krylon αυτού του συστήματος για επιλεγμένο ( $\tau = \bar{\tau}$ ) επίπεδο ανοχής:

$$NRC \equiv NR(\mathbf{K}, \bar{\tau}) \quad (8)$$

ενώ η σχετική αριθμητική τάξη ελεγχιμότητας,  $RNRC$  (%), του συστήματος τιμών ορίζεται ως:

$$RNRC \equiv 100n^{-1}NR(\mathbf{K}, \bar{\tau}) \quad (9)$$

Έχουν αποδειχθεί τα ακόλουθα:

- (i). Εάν το  $\mathbf{v}^T$  είναι P-F ιδιοδιάνυσμα της  $\mathbf{J}$ , τότε  $rank[\mathbf{K}] = 1$ , ανεξαρτήτως της τάξης της  $\mathbf{J}$ . Σε αυτήν την εξαιρετικά ακραία περίπτωση, οι σχετικές τιμές των εμπορευμάτων ισούνται με τους σχετικούς καθέτως ολοκληρωμένους συντελεστές εργασίας, ήτοι  $p_i p_j^{-1} = v_i v_j^{-1}$ , και, επομένως, ισχύει η λεγόμενη «καθαρά εργασιακή θεωρία των τιμών». Ως εκ τούτου, δεν διαψεύδονται οι μη-σραφφαϊανές θεωρίες.
- (ii). Εάν το  $\mathbf{v}^T$  δεν είναι P-F ιδιοδιάνυσμα της  $\mathbf{J}$ , αλλά  $rank[\mathbf{J}] = 1$  (οπότε όλες οι μη-δεσπόζουσες ιδιοτιμές της  $\mathbf{J}$  είναι μηδενικές), τότε  $rank[\mathbf{K}] = 2$ , ανεξαρτήτως του διανύσματος  $\mathbf{v}^T$ . Σε αυτήν την – επίσης – ακραία περίπτωση, (a) οι καμπύλες εμπορευματικών τιμών-ποσοστού κέρδους είναι γνησίως μονότονες, (b) οι καμπύλες χρηματικού ωρομισθίου ποσοστού κέρδους είναι γνησίως κοίλη ή κυρτή, και, επομένως, (c) δεν διαψεύδονται οι μη-σραφφαϊανές θεωρίες.
- (iii). Όσο περισσότερο τα μέτρα των μη-δεσποζουσών ιδιοτιμών της  $\mathbf{J}$  εμφανίζουν έντονα πτωτική τάση ή, με άλλα λόγια, όσο περισσότερο η στατιστική κατανομή τους

είναι λοξή (*skew*), τόσο περισσότερο *τείνουν*: (a) οι καμπύλες τιμών-ποσοστού κέρδους να είναι, στην πλειονότητά τους, μονότονες, (b) οι καμπύλες χρηματικού ωρομισθίου-ποσοστού κέρδους να είναι σταθερής καμπυλότητας, και (c) το σύστημα να είναι σχεδόν μη-ελέγξιμο.

(iv). Αναγκαία συνθήκη για τη διάψευση των μη-σραφαιϊανών θεωριών είναι να υπάρχουν τουλάχιστον δύο μη-δεσπόζουσες ιδιοτιμές της  $\mathbf{J}$ , οι οποίες να είναι μη-μηδενικές: Σε μία τέτοια περίπτωση, η οικονομία συμπεριφέρεται ως σύστημα με τουλάχιστον τρεις τομείς, και, επομένως, υπάρχουν  $\mathbf{v}^T$ , για τα οποία διαψεύδονται οι μη-σραφαιϊανές θεωρίες. Ικανή συνθήκη για τη διάψευση αυτών των θεωριών είναι: (a) το  $\mathbf{v}^T$  να μην είναι P-F ιδιοδιάνυσμα της  $\mathbf{J}$ , και (b) η  $\mathbf{J}$  να είναι μία κυκλοτερής (*circulant*) μήτρα της μορφής:

$$\mathbf{J} = c\mathbf{I} + (1 - c)\mathbf{\Pi}$$

όπου  $0 \leq c < 1$ , και  $\mathbf{\Pi} \equiv \text{circ}[0,1,0,\dots,0]$ . Σε αυτήν την περίπτωση, (a) οι καμπύλες τιμών-ποσοστού κέρδους είναι μη-μονότονες, και (b) το σύστημα είναι σχεδόν πάντοτε πλήρως ελέγξιμο, ανεξαρτήτως του διανύσματος  $\mathbf{v}^T$ .

### 3. Ευρήματα

Ο υπολογισμός των μητρών ελεγχιμότητας όλων των χωρών, οι οποίες περιλαμβάνονται στην *WIOD*, για τα έτη 2000, 2005, 2010 και 2014, δηλαδή ο υπολογισμός  $43 \times 4 = 172$  μητρών ελεγχιμότητας, οδηγεί στα ακόλουθα ευρήματα:<sup>4</sup>

(i). Ο μέσος όρος των γεωμετρικών μέσων,  $GM(|\lambda_{jk}|)$ , των μέτρων των μη-δεσποζουσών ιδιοτιμών των μητρών  $\mathbf{J}$  είναι 0.033. Ο μέσος όρος των μέτρων της υπο-δεσπόζουσας ιδιοτιμής,  $|\lambda_{j2}|$ , είναι 0.516, και ο διάμεσος είναι 0.510. Ο μέσος όρος του  $|\lambda_{j3}|$  είναι 0.406, και ο διάμεσος είναι 0.400. Τέλος, τα  $|\lambda_{jn}|$  είναι της τάξης του  $10^{-14}$  με  $10^{-3}$ .<sup>5</sup>

<sup>4</sup> Ο υπολογισμός των  $\mathbf{A}$  και  $\mathbf{I}^T$  έγινε με το συνήθη στη βιβλιογραφία τρόπο, ενώ το  $n$  κυμαίνεται από 33 έως και 55, αναλόγως των διαθέσιμων πρωτογενών στοιχείων. Το συνολικό πλήθος των υπολογιζομένων ιδιοτιμών είναι 8966.

<sup>5</sup> Υπενθυμίζεται ότι το μέγεθος  $|\lambda_{j2}|^{-1} \lambda_{j1} = |\lambda_{j2}|^{-1}$  είναι γνωστό ως «λόγος απόσβεσης (*damping ratio*)», και αποτελεί μέτρο της εγγενούς προσαρμοστικότητας (*intrinsic resilience*) του συστήματος στις διαταραχές. Σημειώνεται, επίσης, ότι, στην παρούσα περίπτωση, ισχύουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$GM(|\lambda_{jk}|) = |\det[\mathbf{J}]|^{(n-1)^{-1}} = \left( \prod_{i=1}^n \sigma_{ji} \right)^{(n-1)^{-1}}$$

(ii). Οι λόγοι της μικρότερης προς τη μεγαλύτερη ιδιάζουσα τιμή,  $\sigma_{J_n} \sigma_{J_1}^{-1}$ , των μητρών  $\mathbf{J}$  είναι της τάξης του  $10^{-14}$  με  $10^{-4}$ .

(iii). Ο μέσος όρος της απόλυτης τιμής της ορίζουσας των μητρών ελεγκσιμότητας,  $\mathbf{K}$ , είναι  $3 \times 10^{-356}$ , και ο διάμεσος είναι  $4 \times 10^{-737}$  (βλέπε Εξ. 5).

(iv). Ο βαθμός ελεγκσιμότητας,  $DC$ , των οικονομιών είναι της τάξης του  $10^{-21}$  με  $10^{-18}$  (βλέπε Εξ. 7), ο μέσος όρος τους είναι  $4 \times 10^{-19}$ , και ο διάμεσος είναι  $3 \times 10^{-19}$ .

(v). Για  $\tau = 10^{-4}$ , η αριθμητική τάξη ελεγκσιμότητας,  $NRC$ , είναι από 4 έως και 7 (βλέπε Εξ. 8). Ειδικότερα, βρίσκουμε:  $NRC = 7$  στο 3% των περιπτώσεων,  $NRC = 6$  στο 46% των περιπτώσεων,  $NRC = 5$  στο 49% των περιπτώσεων, και  $NRC = 4$  στο 2% των περιπτώσεων. Για  $\tau = 10^{-2}$ , η αριθμητική τάξη ελεγκσιμότητας είναι από 2 έως και 4. Ειδικότερα, βρίσκουμε:  $NRC = 4$  στο 12% των περιπτώσεων,  $NRC = 3$  στο 78% των περιπτώσεων, και  $NRC = 2$  στο 10% των περιπτώσεων. Η σχετική αριθμητική τάξη ελεγκσιμότητας,  $RNRC$ , είναι μεταξύ 7% και 18%, για  $\tau = 10^{-4}$ , και μεταξύ 4% και 9%, για  $\tau = 10^{-2}$  (βλέπε Εξ. 9).

(vi). Τέλος, η ένταξη των χωρών σε επιμέρους ομάδες δεν οδηγεί σε αξιοσημείωτες διαφοροποιήσεις της γενικής εικόνας. Τα Σχήματα 1 και 2 απεικονίζουν τη θέση των ιδιοτιμών των μητρών  $\mathbf{J}$  στο μιγαδικό επίπεδο και, αντιστοίχως, τις κανονικοποιημένες ιδιάζουσες τιμές,  $\sigma_{K_j} \sigma_{K_1}^{-1}$ , των μητρών ελεγκσιμότητας, για τις ακόλουθες τέσσερις ομάδες:<sup>6</sup>

(a). Όλες οι χώρες (43 χώρες)-172 *SIOTs*.

(b). Ευρωζώνη (19 χώρες)-76 *SIOTs*: Αυστρία, Βέλγιο, Γαλλία, Γερμανία, Σλοβακία, Ελλάδα, Εσθονία, Ιρλανδία, Ισπανία, Ιταλία, Κάτω Χώρες, Κύπρος, Λετονία, Λιθουανία, Λουξεμβούργο, Μάλτα, Πορτογαλία, Σλοβενία, και Φινλανδία.

(c). *G10* (11 χώρες)-44 *SIOTs*: Βέλγιο, Γαλλία, Γερμανία, Ελβετία, Ηνωμένες Πολιτείες, Ηνωμένο Βασίλειο, Ιαπωνία, Ιταλία, Καναδάς, Κάτω Χώρες, και Σουηδία.

(d). «Υπόλοιπος Κόσμος» (18 χώρες)-72 *SIOTs*: Αυστραλία, Βουλγαρία, Βραζιλία, Δανία, Δημοκρατία της Κορέας, Ινδία, Ινδονησία, Κροατία, Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας, Μεξικό, Νορβηγία, Ουγγαρία, Πολωνία, Ρουμανία, Ρωσική Ομοσπονδία, Ταϊβάν, Τουρκία, και Τσεχική Δημοκρατία.

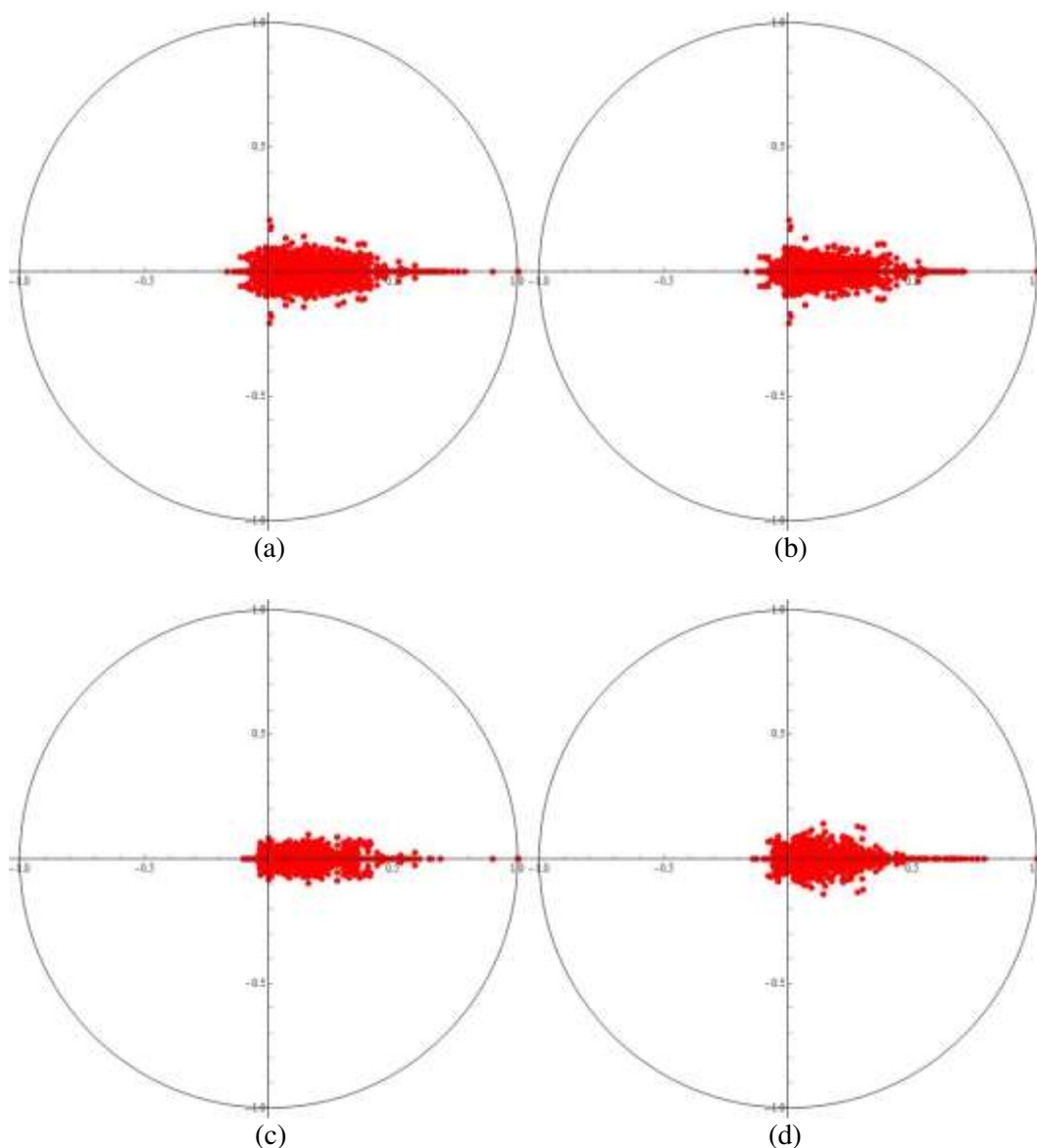
Τα ευρήματά μας δείχνουν ότι:

<sup>6</sup> Στο Σχήμα 2, ο οριζόντιος άξονας έχει σχεδιασθεί σε λογαριθμική κλίμακα.



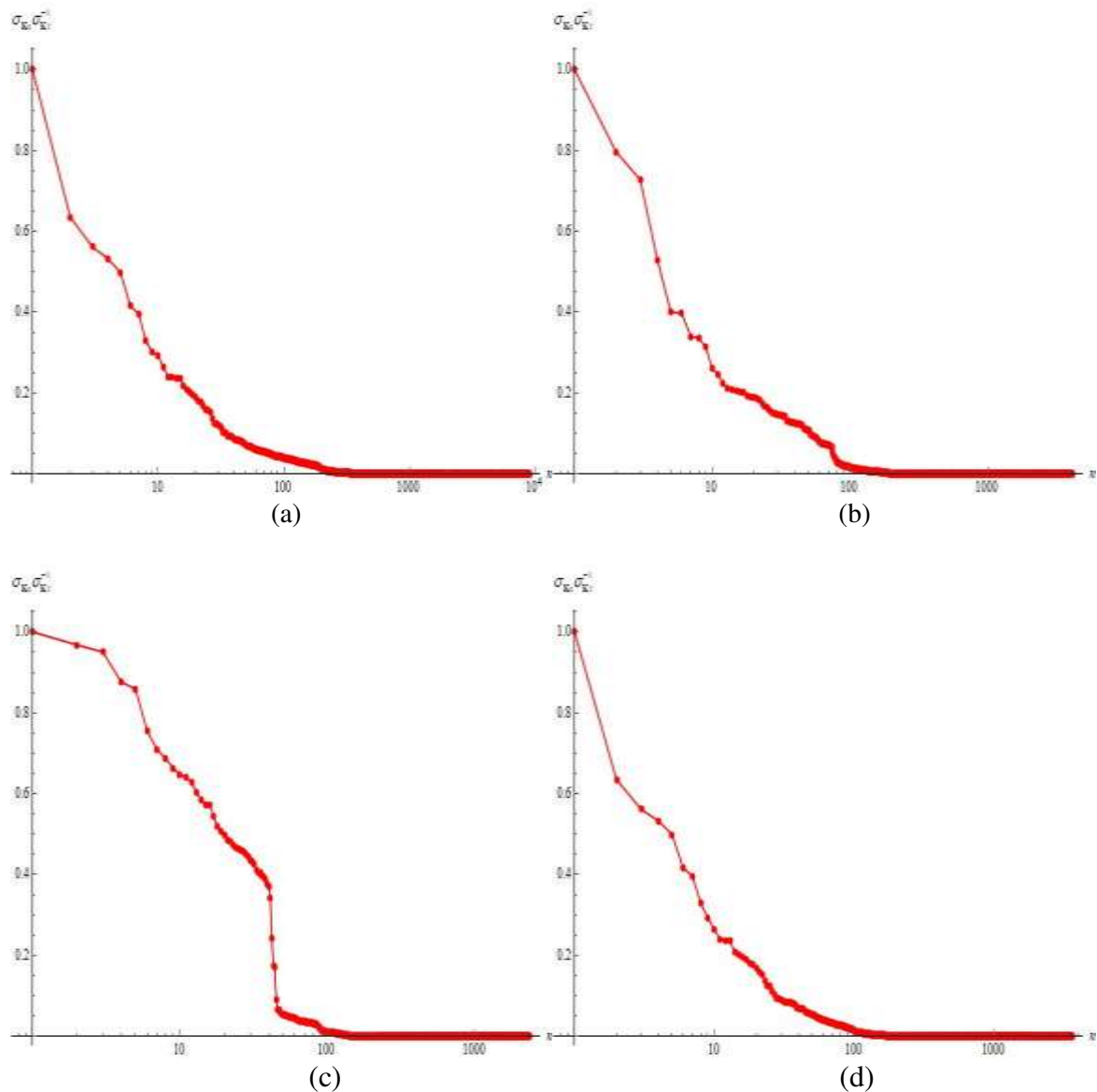
(i). Τα συστήματα τιμών των πραγματικών οικονομιών είναι σχεδόν μη-ελέγξιμα. Για επίπεδα ανοχής της τάξης του  $10^{-4}$  με  $10^{-2}$ , μόνο ένα σχετικά μικρό πλήθος ιδιοσυστημάτων τους είναι πλήρως ελέγξιμο.

(ii). Αυτό το γεγονός απορρέει, πρωτίστως, από τη λοξή κατανομή των ιδιοτιμών και των ιδιαζουσών τιμών των μητρών  $\mathbf{J}$  (βλέπε Εξ. 6).<sup>7</sup>



**Σχήμα 1.** Η θέση των ιδιοτιμών των κανονικοποιημένων μητρών των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών στο μιγαδικό επίπεδο: (a) Όλες οι χώρες, (b) Ευρωζώνη, (c) G10, και (d) «Υπόλοιπος Κόσμος»

<sup>7</sup> Σε ίδια συμπεράσματα οδήγησαν τα εμπειρικά ευρήματα που εκτίθενται στο Mariolis (2019), ορισμένα εκ των οποίων είναι από Πίνακες Προφοράς-Χρήσεων (SUTs) και, επομένως, αντιστοιχούν στην περίπτωση της συμπαραγωγής (*joint production*).



**Σχήμα 2.** Οι κανονικοποιημένες ιδιάζουσες τιμές των μητρών ελεγχιμότητας: (a) Όλες οι χώρες, (b) Ευρωζώνη, (c) G10, και (d) «Υπόλοιπος Κόσμος»

#### 4. Συμπερασματικές Παρατηρήσεις

Ο υπολογισμός των μητρών ελεγχιμότητας όλων των χωρών, οι οποίες περιλαμβάνονται στην *WIOD*, για τα έτη 2000, 2005, 2010 και 2014, δηλαδή ο υπολογισμός 172 μητρών ελεγχιμότητας, δείχνει ότι τα κατά *Sraffa* συστήματα τιμών των οικονομιών του πραγματικού κόσμου είναι σχεδόν μη-ελέγξιμα. Ειδικότερα, βρέθηκε ότι ο βαθμός ελεγχιμότητας είναι της τάξης του  $10^{-21}$  με  $10^{-18}$ , και η σχετική αριθμητική τάξη της ελεγχιμότητας είναι μεταξύ 4% και 18%, για επίπεδα ανοχής μεταξύ  $10^{-2}$  και  $10^{-4}$ , αντιστοίχως. Αυτά τα ευρήματα:

- (i). Δηλώνουν ότι τα κατά Sraffa συστήματα τιμών των οικονομιών του πραγματικού κόσμου αποτελούν ελέγξιμα συστήματα χαμηλής τάξης και, επομένως, μπορούν να απεικονιστούν με αξιοπιστία μέσω υποδειγμάτων σχετικά μικρών διαστάσεων.
- (ii). Ανάγονται, πρωτίστως, στη λοξή κατανομή των χαρακτηριστικών τιμών των μητρών των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών. Και αυτό μάλλον συνεπάγεται, με τη σειρά του, τη σχεδόν μη-ελεγχιμότητα του συστήματος των φυσικών ποσοτήτων-κατανάλωσης-ποσοστού μεγέθυνσης και τη σχεδόν μη-παρατηρησιμότητα και των δύο συστημάτων (δηλαδή, τιμών και φυσικών ποσοτήτων).
- (iii). Εξηγούν τα παράδοξα χαρακτηριστικά της μορφής των σραφφαϊανών εμπειρικών καμπυλών εμπορευματικών τιμών-χρηματικού ωρομισθίου-ποσοστού κέρδους, τα οποία είχαν εντοπιστεί σε προγενέστερες μελέτες.
- (iv). Δείχνουν ότι η σραφφαϊανή θεωρία δεν είναι μόνο η πιο γενική θεωρία, αλλά και προσφέρει στέρεη βάση για εμπειρική ανάλυση. Αντιθέτως, οι μη-σραφφαϊανές θεωρίες (κλασική, μαρξιστική, αυστριακή, και νεοκλασική) αποδεικνύονται ακατάλληλες για την ανάλυση των οικονομιών του πραγματικού κόσμου.

Η μελλοντική ερευνητική εργασία θα πρέπει να στραφεί (i) στη μελέτη του συστήματος των φυσικών ποσοτήτων και της παρατηρησιμότητας των οικονομιών του πραγματικού κόσμου, (ii) στα πρωτογενή στοιχεία που προσφέρουν οι Πίνακες Προσφοράς-Χρήσεων, και (iii) στις περαιτέρω συνέπειες που έχει η σχεδόν μη-ελεγχιμότητα/παρατηρησιμότητα των συστημάτων τιμών και φυσικών ποσοτήτων του πραγματικού κόσμου για την Πολιτική Οικονομία και την Οικονομική Πολιτική.

#### **Αναφορές**

- Friedland, B. (1975). Controllability index based on conditioning number. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 97(4), 444–445.
- Friedland, B. (1986). *Control system design. An introduction to state-space methods*. New York: McGraw-Hill.
- Kalman, R. E. (1960). On the general theory of control systems. *International Federation of Automatic Control Proceedings Volumes*, 1(1), 491–502.
- Kalman, R. E. (1982). On the computation of the reachable/observable canonical form. *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Control and Optimization*, 20(2), 258–260.
- Kalman, R. E., Ho, Y. C., & Narendra, K. S. (1963). Controllability of linear dynamic systems. *Contributions to Differential Equations*, 1(2), 189–213.
- Mariolis, T. (2019). *The location of the value theories in the complex plane and the degree of regularity-controllability of actual economies*. Mimeo.  
<https://www.researchgate.net/publication/337565978>

- Moore, B. (1981). Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction. *Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Automatic Control*, 26(1), 17–32.
- Sraffa, P. (1960). *Production of commodities by means of commodities. Prelude to a critique of economic theory*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Timmer, M. P., Dietzenbacher, E., Los, B., Stehrer, R., & De Vries, G. J. (2015). An illustrated user guide to the World Input–Output Database: The case of global automotive production. *Review of International Economics*, 23(3), 575–605.