



Munich Personal RePEc Archive

**On the fiscal policy for full employment:
Theoretical analysis with an overlapping
generations model -A theoretical
foundation of MMT (Modern Monetary
Theory)-**

Tanaka, Yasuhito

10 March 2021

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/106589/>
MPRA Paper No. 106589, posted 15 Mar 2021 11:08 UTC

完全雇用実現のための財政政策について：
世代重複モデルによる理論的分析
-MMT（現代貨幣理論）の理論的基礎¹

田中靖人

同志社大学経済学部

<要旨>

独占的競争のもとでの世代重複モデルを用いて需要不足による非自発的失業の存在について考えるとともに、財政政策によって完全雇用を実現する可能性を検討する。主な結論は以下の通りである。非自発的失業が存在する状況において財政支出の拡大によって完全雇用を実現するためには財政赤字にして政府債務を作る必要があるが、その後完全雇用を維持するためには均衡財政が求められる。したがって最初の政府債務を返済する必要はない。同様に減税によって完全雇用を実現する場合も、その減税による直接的な消費増加分の財源は政府債務で賄い、それを返済する必要はない。政府債務を返済しないというのは満期のない国債にするか、中央銀行が買い取ることを意味する。本稿の内容はいわゆる現代貨幣理論(MMT)に基づく議論に理論的な基礎を与えるものである。

<キーワード>

世代重複モデル, 独占的競争, 非自発的失業, 完全雇用, 財政政策, 減税

On the fiscal policy for full employment: Theoretical analysis with an overlapping generations model

-A theoretical foundation of MMT (Modern Monetary Theory)-

Yasuhito TANAKA

Faculty of Economics, Doshisha University

<Abstract>

Using an overlapping generations model under monopolistic competition, we consider the existence of involuntary unemployment due to insufficient demand and examine the possibility of achieving full employment through fiscal policy. The main conclusions are as follows: In order to achieve full employment by expanding fiscal spending in a situation where involuntary unemployment exists, it is necessary to run a budget deficit and create government debt. After that, a balanced budget will be required to maintain full employment. Therefore, there is no need to redeem the initial government debt. Similarly, when full employment is achieved by cutting taxes, the direct increase in consumption resulting from the tax cut should be financed by the government debt, and there is no need to redeem it. Not redeeming government bonds means that they will either be non-maturity bonds or that the central bank will buy them. We present

¹ 本研究は科学研究費補助金（18K01594, 代表：田中靖人）の助成を受けたものである。

a theoretical foundation for the so-called MMT (modern monetary theory, for example, Mitchell, Wray and Watts(2019)).

<Keywords>

Overlapping generations model, Monopolistic competition, Involuntary unemployment, Fiscal policy, Tax cut

1. はじめに

わが国における国債の発行残高は約 900 兆円、地方債を含めると約 1100 兆円で危機的な状況にあるとされる。一方、著名な経済学者であるアバ・ラーナー(Lerner (1944))は政府の債務はそれが対外債務でなければいくら増えても問題はないと主張する。ラーナーによれば政府が国債を発行して財政支出を増やし、それが償還される時点で増税する必要があるとしても、増税も償還も同じ世代の消費者に対してなされるので、結局ある消費者から別の消費者に購買力が移転されるだけであり将来世代全体の負担になるわけではない¹。本稿ではこの議論をさらに進め、大瀧雅之氏が一連の研究 (otaki (2007, 2009, 2015a))で用いられた独占的競争下の世代重複モデルによって不況対策として国債を発行して調達した財政支出の増加分については返済 (償還) する必要はないということを論じる。政府債務を返済 (償還) しないというのは満期のない国債にするか、中央銀行が買い取ることを意味する。大瀧氏のモデルは通常の 2 世代重複モデルであるが、本稿ではそれを 3 世代に拡張したモデルを用いる。人々は幼年期、若年期 (労働期)、老年期 (退職期) の 3 期間生存し、幼年期にはそのときの若年世代から借入れをして (または政府による奨学金を受けて) 消費し若年期にその債務を返済する。消費、労働供給の決定は若年期の初めになされ、幼年期の消費は一定である。若年期に失業すると債務が返済できなくなるので政府が失業保険を支給する。その財源は働いている若年世代が支払う税によって賄う。また老年世代の人々には働いている若年世代の負担で賦課方式の年金が支給される。このようにモデルを拡張し消費者が貯蓄だけではなく債務を抱えるということを含めて考えると、非自発的失業の存在によって名目賃金率と物価が下落したときの実質残高効果によって消費が増えるのではなく減る可能性が生じる。ただし、実質残高効果は本稿の主要なテーマではなく、それがあろうとなかろうと財政政策によって有効かつすみやかに完全雇用を達成できると主張するのが主な内容である。

次の節ではモデルの構造を説明し、消費者の効用最大化、企業の利潤最大化行動を分析する。労働供給は連続的な変数であると考え、第 3 節で非自発的失業が存在する可能性について論じ、第 4 節では需要不足による非自発的失業が存在している状況において財政支出の増加による財政政策によって完全雇用を実現する方策について検討する。財政支出を増やすときには財政は赤字になるが、完全雇用を実現した後は均衡財政によって (均衡財政に戻すことによって) 完全雇用を維持することができることが示される。これは財政支出の増加を続けなくてもよいということの意味するだけでなく最初に生じた財政赤字を埋め合わせる必要がないこと、そのときに発行した国債は返済 (償還) しなくてもよいということをも意味する。したがって、制度的に可能ならば国債発行ではなく通貨発行益(seigniorage)によって資金を調達した方がよい。第 5 節では減税によって完全雇用を実現する政策について考察する。減税の場合は一部が貯蓄に回されてしまうために少々問題は複雑になる。最初の減税は貯蓄される部分を除いて需要不足を埋め合わせるだけの

¹ ラーナーの議論を要領よくまとめたものに田村(2015)がある。

金額が必要であるが、貯蓄された部分は次の期の消費を増やすのでそのときにインフレーションを招く需要超過にならないようにするためには増税が必要になる。そうすると貯蓄が減りさらに次の期の消費が不足するので再び減税する...、と繰り返されるが、消費者の限界消費性向が $\frac{1}{2}$ より大きければ長期的には定常状態に収束し、結果として最初の減税の内、その期に消費される部分のみが赤字として残る。これは財政支出の増加と同じ結論である。

拙著論文（田中(2020a, 2020b)）では静学的なモデルを用いていたが、本稿では上で述べたような動学的な世代重複モデルを用いている。

大瀧雅之氏自身は otaki(2015b) で国債発行による財政支出の増加が将来世代の負担になると述べておられるが、国債の償還を前提とした議論である。

本稿の内容はいわゆる現代貨幣理論(MMT (Mitchell, Wray and Watts(2019)))に基づく議論に理論的な基礎を与えるものである。

2. モデルと分析

2.1 消費者の効用最大化

本稿の分析では大瀧雅之氏の一連の研究の基礎となる 2 期間の世代重複モデル(overlapping generations model)を拡張、一般化した 3 期間 (3 世代) の世代重複モデルを用いる。0, 1, 2 の 3 つの期間はそれぞれ、0: 幼年期, 1: 若年期 (あるいは労働期), 2: 老年期 (あるいは退職期) であり、産業構造としては独占的競争を想定する。モデルの構成は以下の通りである。

1. 生産要素は労働のみであり、生産される財は $[0,1]$ の連続体をなし、各財は指標 $z \in [0,1]$ で表される。財 z は規模に関して収穫一定の技術のもと企業 z によって独占的に生産される。
2. 消費者は幼年期 (第 0 期) にも財を消費するが労働はしないのでそれに要する支出はそのときの若年期の人々からの借り入れ、あるいは政府による奨学金によって賄われる。その債務は自らが若年期になったとき (第 1 期) に返済しなければならない。しかし、失業すると返済できないので、失業者に対してはその債務の返済のために政府から失業保険が支給されるものとする。その財源は働いている若年世代の人々によって負担される。
3. 消費者は若年期 (第 1 期) において l 単位の労働を供給し、財を消費し、自らの債務を返済するとともに老年期に備えた貯蓄を行う。また、そのときの老年世代が受け取る賦課方式の年金の財源となる税を支払う。
4. 老年期 (第 2 期) において消費者は若年期から持ち越した自らの貯蓄によって消費するとともに賦課方式の年金を受け取る。年金の財源はそのときの若年世代によって負担される。
5. 消費者は自らが雇用されているか失業しているかという状況に応じて第 1 期, 第 2 期における消費と労働供給を第 1 期の初めに決める。幼年期の消費はすべての消費者に共通の定数であるとする。

さらに以下の仮定を置く。

企業の所有権 若年期の各消費者は前世代から企業の所有権を受け継ぐ。利潤は均等に配分される。

ゼロの利子率 利子率は若年世代の貯蓄と政府の奨学金による資金の供給の和が幼年世代の消費と等しくなるように決まると考えることもできるであろうが、もしも奨学金がなければ、特に賦課方式の年金が存在する状況においては貯蓄が少なくなるので利子率に関わらず資金の供給が不足する可能性が大きい。その差を埋め合わせるのが奨学金であるから、政府は奨学金の支給額を決めることによって利子率を操作できるであろう。奨学金が増やされたり、減らされたり、あるいは有利子になったり無利子になったりすれば利子率は変化し、それによって消費者の消費も変化するかもしれない。しかし、例えば利子率の下落が代替効果によって若年期の消費を増やす一方、老年期の消費を減少させる。また、利子率の下落は幼年期の消費による債務を減らす一方で貯蓄の価値を小さくするので所得効果も不透明である。したがって利子率の変化が財の需要に大きく影響する可能性は小さい。そのため本稿では奨学金の支給額が利子率をゼロにするように決定されると仮定する。幼年期の消費に伴う債務の返済が確実であれば、若年期の消費者にとって幼年期の消費者に貸付をすることと貨幣のまま貯蓄することは無差別である。

記号の意味：各記号の意味を以下のように定義する。

C_i^e : 雇用されている消費者の第 i ($i = 1, 2$) 期における消費バスケット。

消費バスケットは後に定義する。

C_i^u : 失業している消費者の第 i ($i = 1, 2$) 期における消費バスケット。

$c_i^e(z)$: 雇用されている消費者の第 i ($i = 1, 2$) 期における財 z の消費量。

$c_i^u(z)$: 失業している消費者の第 i ($i = 1, 2$) 期における財 z の消費量。

D : 幼年期における消費者の消費バスケット。定数である。

P_i : 第 i ($i = 1, 2$) 期における消費バスケットの価格。

$p_i(z)$: 第 i ($i = 1, 2$) 期における財 z の価格。

$\rho = \frac{P_2}{P_1}$: (期待)物価上昇率(+1)。

W : 名目賃金率。

R : 失業保険給付。 $R = D$ 。

\hat{D} : 次の世代の消費者の幼年期における消費バスケット。

Q : 老年期の消費者に対する賦課方式の年金支給額。

Θ : 失業保険の財源のための税負担。働いている若年世代の消費者が払う。

\hat{Q} : 若年世代の消費者が退職後老年期（第2期）に受け取れる賦課方式の年金額。

Ψ : 賦課方式の年金のための税負担。働いている若年世代の消費者が払う。

Π : 企業の利潤。若年期の消費者に均等に配分される。

l : 消費者による労働供給。

$\Gamma(l)$: 労働の不効用。凸の増加関数であるとする。

L : 総雇用量。

L_f : 総労働人口, あるいは完全雇用状態における雇用量。

y : 労働生産性。定数であるとする (規模に関して収穫一定)。

総労働人口 L_f は一定である。また, この節では名目賃金率も一定であると仮定する。その変化の影響は後の節で検討する。

消費に関する消費者の効用最大化は以下の二つのステップで解くことができる。

1. 雇用されている消費者および失業している消費者が 2 期間にわたる所得をもとに第 1 期, 第 2 期の消費バスケットを決める。
2. 各期における支出のもとでその消費バスケットを最大にする。

失業している消費者に対する失業保険は同じ世代の働いている消費者が支払う税によって賄われるので $D(=R)$ および Θ は $D(L_f - L) = L\Theta$ を満たす。これは

$$L(D + \Theta) = L_f D$$

を意味する。また, 賦課方式の年金の財源も働いている若年世代の消費者が納める税によって負担されるので, Q および Ψ は

$$L\Psi = L_f Q.$$

を満たす。若年期に雇用された消費者の 3 期にわたる効用は次のように表される。

$$u(C_1^e, C_2^e, D) - \Gamma(L).$$

$u(\cdot)$ はホモセティック (homothetic) な関数であるとする。若年期に失業している消費者の効用は次のように書ける。

$$u(C_1^u, C_2^u, D).$$

雇用された消費者および失業している消費者の第 i 期における消費バスケットは以下のように定義される。

$$C_i^e = \left(\int_0^1 c_i^e(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dz \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}},$$
$$C_i^u = \left(\int_0^1 c_i^u(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dz \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \quad i = 1, 2.$$

σ は財の代替の弾力性であり, $\sigma > 1$ を満たす。

第 i 期における消費バスケットの価格は

$$P_i = \left(\int_0^1 p_i(z)^{1-\sigma} dz \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}, \quad i = 1, 2$$

と表される。雇用されている消費者の予算制約は

$$P_1 C_1^e + P_2 C_2^e = Wl + \Pi - D - \Theta + \hat{Q} - \Psi$$

であり, 失業している消費者の予算制約は

$$P_1 C_1^u + P_2 C_2^u = \Pi - D + R + \hat{Q} = \Pi + \hat{Q} \quad (R = D \text{なので})$$

と表される。ここで

$$\alpha = \frac{P_1 C_1^e}{P_1 C_1^e + P_2 C_2^e}, \quad 1 - \alpha = \frac{P_2 C_2^e}{P_1 C_1^e + P_2 C_2^e}$$

である。効用関数 $u(C_1^e, C_2^e, D)$, $u(C_1^u, C_2^u, D)$ がホモセティックなので, α は相対価格 $\frac{P_2}{P_1}$ によって決まり, 消費者の所得には依存しない。したがって

$$\alpha = \frac{P_1 C_1^e}{P_1 C_1^e + P_2 C_2^e} = \frac{P_1 C_1^u}{P_1 C_1^u + P_2 C_2^u}$$

$$1 - \alpha = \frac{P_2 C_2^e}{P_1 C_1^e + P_2 C_2^e} = \frac{P_2 C_2^u}{P_1 C_1^u + P_2 C_2^u}$$

が得られる。雇用された消費者および失業している消費者の効用最大化の一階条件から消費バスケットに対する需要関数が次のように求められる。

$$C_1^e = \alpha \frac{Wl + \Pi - D - \Theta + \hat{Q} - \Psi}{P_1},$$

$$C_2^e = (1 - \alpha) \frac{Wl + \Pi - D - \Theta + \hat{Q} - \Psi}{P_2},$$

$$C_1^u = \alpha \frac{\Pi + \hat{Q}}{P_1},$$

$$C_2^u = (1 - \alpha) \frac{\Pi + \hat{Q}}{P_2}.$$

ステップ 2 の最大化問題を解けば (付録参照) 雇用された消費者および失業している消費者による財 z の需要関数が以下のように導かれる。

$$c_1^e(z) = \left(\frac{p_1(z)}{P_1} \right)^{-\sigma} \frac{\alpha (Wl + \Pi - D - \Theta + \hat{Q} - \Psi)}{P_1},$$

$$c_2^e(z) = \left(\frac{p_2(z)}{P_2} \right)^{-\sigma} \frac{(1 - \alpha) (Wl + \Pi - D - \Theta + \hat{Q} - \Psi)}{P_2},$$

$$c_1^u(z) = \left(\frac{p_1(z)}{P_1} \right)^{-\sigma} \frac{\alpha (\Pi + \hat{Q})}{P_1},$$

$$c_2^u(z) = \left(\frac{p_2(z)}{P_2} \right)^{-\sigma} \frac{(1 - \alpha) (\Pi + \hat{Q})}{P_2}.$$

以上の分析によって雇用された消費者および失業している消費者の間接効用関数が

$$V^e = u \left(\alpha \frac{Wl + \Pi - D - \Theta + \hat{Q} - \Psi}{P_1}, (1 - \alpha) \frac{Wl + \Pi - D - \Theta + \hat{Q} - \Psi}{P_2}, D \right) - \Gamma(l),$$

および

$$V^u = u\left(\alpha \frac{\Pi + \hat{Q}}{P_1}, (1 - \alpha) \frac{\Pi + \hat{Q}}{P_2}, D\right)$$

となる。 $\omega = \frac{W}{P_1}$, $\rho = \frac{P_2}{P_1}$ とすると、幼年期の消費 D は一定であるから

$$V^e = \varphi\left(\omega l + \frac{\Pi - D - \Theta + \hat{Q} - \Psi}{P_1}, \rho\right) - \Gamma(l),$$

および

$$V^u = \varphi\left(\frac{\Pi + \hat{Q}}{P_1}, \rho\right)$$

と書くことができる。 ω は実質賃金率である。

$$I = \omega l + \frac{\Pi - D - \Theta + \hat{Q} - \Psi}{P_1}.$$

とすれば、与えられた ρ のもとでの l に関する V^e の最大化条件は

$$\frac{\partial \varphi}{\partial I} \omega - \Gamma'(l) = 0 \tag{1}$$

である。ここで

$$\frac{\partial \varphi}{\partial I} = \alpha \frac{\partial u}{\partial c_1^e} + (1 - \alpha) \frac{\partial u}{\partial c_2^e}.$$

P_1 と ρ が与えられたものとして労働供給は ω の関数となる。(1) より

$$\frac{dl}{d\omega} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial I} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial I^2} \omega l}{\Gamma''(l) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial I^2} \omega^2}$$

を得る。 $\frac{dl}{d\omega} > 0$ ならば、労働供給は実質賃金率 ω について増加関数である。 l は雇用量 L に依存する可能性があるが、 Ll は L の増加関数であるとする。

2.2 企業の利潤最大化

第 1 期における若年世代の消費者による財 z の需要を $d_1(z)$ とすると

$$d_1(z) = \left(\frac{p_1(z)}{P_1}\right)^{-\sigma} \frac{\alpha(WLl + L_f \Pi - L_f D + L_f \hat{Q} - L_f Q)}{P_1}$$

である。これは雇用された消費者と失業している消費者の需要の合計に等しい。 \hat{Q} は若年世代の消費者の第 2 期（老年期）における賦課方式の年金支給額を表している。同様にして彼らの第 2 期における財 z の需要は次のようになる。

$$d_2(z) = \left(\frac{p_2(z)}{P_2} \right)^{-\sigma} \frac{(1-\alpha)(W\bar{L}l + L_f\bar{\Pi} - L_f\bar{D} + L_f\hat{Q} - L_f\bar{Q})}{P_2}$$

老年世代による財 z の需要を $\overline{d_2(z)}$ とすると,

$$\overline{d_2(z)} = \left(\frac{p_1(z)}{P_1} \right)^{-\sigma} \frac{(1-\alpha)(\bar{W}\bar{L}\bar{l} + L_f\bar{\Pi} - L_f\bar{D} + L_fQ - L_f\bar{Q})}{P_1}$$

である。ここで、 \bar{W} , $\bar{\Pi}$, \bar{L} , \bar{l} , \bar{D} および \bar{Q} はそれぞれ一つ前の期における名目賃金率, 企業利潤, 雇用量, 消費者の労働供給, 消費者の債務, および賦課方式の年金支給額を表している。 Q は老年世代自身が受け取る年金額である。

$$M = (1-\alpha)(\bar{W}\bar{L}\bar{l} + L_f\bar{\Pi} - L_f\bar{D} + L_fQ - L_f\bar{Q})$$

と置く。これは第 2 期に受け取る賦課方式の年金を含む老年世代の消費者の貯蓄, あるいは消費の合計であり, その老年世代の人々の第 1 期に決定された消費である。純貯蓄は M と賦課方式の年金額の差として次のように表される。

$$\tilde{M} = M - L_fQ.$$

彼らの財 z に対する需要は $\left(\frac{p_1(z)}{P_1} \right)^{-\sigma} \frac{M}{P_1}$ に等しい。政府支出も若年世代, 老年世代の消費とともに国民所得を構成する。政府支出の財源は若年世代に対する課税によって調達される。すると, 財 z に対する需要の合計は

$$d(z) = \left(\frac{p_1(z)}{P_1} \right)^{-\sigma} \frac{Y}{P_1} \quad (2)$$

となる。 Y は以下の式で表現される有効需要である。

$$Y = \alpha(WLl + L_f\Pi - T - L_fD + L_f\hat{Q} - L_fQ) + G + L_f\hat{D} + M.$$

\hat{D} は次の世代の人々の幼年期における消費, G は政府支出 (年金, 失業保険給付, 奨学金を除く), T はその政府支出のための税を表す。(2)の需要関数については Otaki (2007, 2009, 2015a)を参照していただきたい。

L を雇用量, Ll を「雇用量×労働供給」とすると, 企業 z の産出量は Lly に等しく, 均衡においては $Lly = d(z)$ が成り立つ。そのとき

$$\frac{\partial d(z)}{\partial (Ll)} = y$$

である。(2) より $\frac{\partial p_1(z)}{\partial d(z)} = -\frac{p_1(z)}{\sigma d(z)}$ が得られるから,

$$\frac{\partial p_1(z)}{\partial (Ll)} = -\frac{p_1(z)y}{\sigma d(z)} = -\frac{p_1(z)y}{\sigma Lly}$$

となる。企業 z の利潤は

$$\pi(z) = p_1(z)Lly - LIW$$

と表される。利潤最大化の条件は

$$\frac{\partial \pi(z)}{\partial (Ll)} = p_1(z)y - Lly \frac{p_1(z)y}{\sigma Lly} - W = p_1(z)y - \frac{p_1(z)y}{\sigma} - W = 0.$$

したがって、

$$p_1(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{\sigma})y} W = \frac{1}{(1-\mu)y} W, \quad \mu = \frac{1}{\sigma}$$

が成り立つ。これは実質賃金率が

$$\omega = (1 - \mu)y$$

を満たすことを意味する。企業の対称性によって

$$P_1 = p_1(z) = \frac{1}{(1-\mu)y} W \quad (3)$$

である。

2.3 非自発的失業の存在

第 t 期の状況を考える。財の名目総供給は

$$W^t L^t + L_f \Pi^t = P_1^t L^t l^t y$$

であり、名目総需要は次のように表される。

$$\begin{aligned} & \alpha(W^t L^t + L_f \Pi^t - T^t - L_f D^t + L_f \hat{Q}^t - L_f Q^t) + G^t + L_f \hat{D}^t + M^t \\ & = \alpha(P_1^t L^t l^t y - T^t - L_f D^t + L_f \hat{Q}^t - L_f Q^t) + G^t + L_f \hat{D}^t + M^t. \end{aligned}$$

上添字 t は第 t 期の値であることを表す。均衡において総供給と総需要は等しくなるので、

$$P_1^t L^t l^t y = \alpha(P_1^t L^t l^t y - T^t - L_f D^t + L_f \hat{Q}^t - L_f Q^t) + G^t + L_f \hat{D}^t + M^t$$

が成り立つ。「雇用量×労働供給」 $L^t l^t$ は

$$L^t l^t = \frac{\alpha(-T^t - L_f D^t + L_f \hat{Q}^t - L_f Q^t) + G^t + L_f \hat{D}^t + M^t}{(1-\alpha)P_1^t y} \quad (4)$$

となる。 $l(L_f)$ は完全雇用状態における労働供給である。 $L^t l^t$ は $L_f l(L_f)$ より大きくはならない。しかし、 $L^t l^t$ が $L_f l(L_f)$ より小さくなることは起こりうる。そのとき、 $L^t < L_f$ であり、非自発的失業が存在する。まず均衡財政 $G^t = T^t$ を仮定する。超過需要のない完全雇用均衡においては $L^t l^t = L_f l(L_f)$, $P_1^{t+1} = P_1^t$, $\hat{Q}^t = Q^t$, $\hat{D}^t = D^t$ が成り立つ。完全雇用状態における各変数の値を添字 * をつけて表すことにすると、

$$L_f l(L_f) = \frac{\alpha(-G^* - L_f D^* + L_f Q^* - L_f Q^*) + G^* + L_f D^* + M^*}{(1-\alpha)P_1^* y} = \frac{(1-\alpha)(G^* + L_f D^*) + M^*}{(1-\alpha)P_1^* y}$$

となる。 G^t, \hat{D}^t および Q^t の実質値をそれぞれ g, d, q と表し、物価が変化してもこれらの変数の実質値が変わらないと仮定する。そのとき、

$$L_f l(L_f) = \frac{(1-\alpha)(P_1^* g + L_f P_1^* d) + M^*}{(1-\alpha)P_1^* y}$$

が成り立つ。この式から

$$M^* = (1-\alpha)P_1^*(L_f l(L_f)y - g - L_f d)$$

を得る。これは定常状態における貯蓄である。

実質残高効果について

次節以降では財政政策によって完全雇用を実現する可能性について検討するが、非自発的失業が存在するときに名目賃金率が下落し、それに伴って物価も下落すれば、老年世代の貯蓄の実質的な価値が増えて消費が増える可能性がある。いわゆる実質残高効果（あるいはピグー効果）である。しかし、そのとき債務の実質価値も大きくなるので必ずしも消費が増えるとは限らない。少し検討してみよう。(4)において $T^t, \hat{Q}^t, G^t, Q^t, \hat{D}^t$ は物価 P_1^t が変化すると同じように変化しそれらの実質値が変わらないと考えられる。それに対して債務 D^t はその名目的な値が維持されるであろう。では貯蓄 M^t はどうであろうか。これは正味の貯蓄ではなく老年期に受け取れる賦課方式の年金を含むものである。 $\hat{Q}^t = Q^t$ として正味の貯蓄(net savings)は次のように表される。

$$M^t - L_f Q^t.$$

物価が変化してもこの名目値は変わらない。したがって、(4)において物価の変化によって名目値が変わらないのは

$$M^t - L_f Q^t - \alpha L_f D^t$$

である。これが正ならば物価の下落によって消費が増える可能性があるが、負であれば逆に消費が減る。そのときは逆の（負の）実質残高効果が働くと考えることができる。

3. 完全雇用のための財政政策：財政支出の増加

第 t 期において $\hat{D}^t = D^t$ として、

$$L^t l^t = \frac{(1-\alpha)L_f P_1^t d - \alpha T^t + G^t + M^t}{(1-\alpha)P_1^t y}$$

が、 G^t あるいは M^t の不足によって $L_f l(L_f)$ より小さく非自発的失業が発生していると仮定する。その期における若年世代の消費者による貯蓄は

$$M^{t+1} = (1-\alpha)(P_1^t L^t l^t y - T^t - P_1^t L_f d)$$

に等しい。 $T^t = T^*$ かつ $P_1^t = P_1^*$ とすると、 $L^t l^t < L_f l(L_f)$ であるから

$$M^{t+1} < M^*$$

あるいは,

$$\frac{M^{t+1}}{P_1^t} < \frac{M^*}{P_1^*} \text{ かつ } \frac{T^t}{P_1^t} = \frac{T^*}{P_1^*}$$

が成り立つ。

ここで、第 $t+1$ 期において、 G^{t+1} の政府支出によって完全雇用が達成されたと考えてみよう。 $P_1^{t+1} = P_1^t$ ならば

$$L_f l(L_f) = \frac{(1-\alpha)L_f P_1^{t+1} d - \alpha T^{t+1} + G^{t+1} + M^{t+1}}{(1-\alpha)P_1^{t+1} y} \quad (5)$$

となる。税の実質値が変わらないとして

$$\frac{T^{t+1}}{P_1^{t+1}} = \frac{T^t}{P_1^t}$$

と仮定すると,

$$L_f l(L_f) = \frac{(1-\alpha)L_f d - \alpha \frac{T^t}{P_1^t} + \frac{G^{t+1}}{P_1^{t+1}} + \frac{M^{t+1}}{P_1^{t+1}}}{(1-\alpha)y} \quad (6)$$

が得られる。均衡財政のもとで完全雇用が実現している定常状態においては

$$L_f l(L_f) = \frac{(1-\alpha)L_f P_1^* d - \alpha G^* + G^* + M^*}{(1-\alpha)P_1^* y} = \frac{(1-\alpha)L_f d - \alpha \frac{G^*}{P_1^*} + \frac{G^*}{P_1^*} + \frac{M^*}{P_1^*}}{(1-\alpha)y} \quad (7)$$

が成り立つ。 $P_1^{t+1} = P_1^t = P_1^*$ および $T^t = T^* = G^*$ ならば、(6), (7) と $M^{t+1} < M^*$ から $G^{t+1} > G^*$ を得る。一方、 $P_1^{t+1} = P_1^t \neq P_1^*$ かつ $\frac{T^{t+1}}{P_1^{t+1}} = \frac{T^t}{P_1^t} = \frac{T^*}{P_1^*} = \frac{G^*}{P_1^*}$ であれば、(6), (7) と $\frac{M^{t+1}}{P_1^t} < \frac{M^*}{P_1^*}$ によって $\frac{G^{t+1}}{P_1^{t+1}} > \frac{G^*}{P_1^*} = \frac{T^{t+1}}{P_1^{t+1}}$ を得る。したがって、 $t+1$ 期に完全雇用を実現するためには財政赤字が必要となる。

$t+1$ 期における若年世代の消費者による貯蓄は

$$M^{t+2} = (1-\alpha)(P_1^{t+1} L_f l(L_f) y - T^{t+1} - P_1^{t+1} L_f d) = (1-\alpha)P_1^{t+1} \left(L_f l(L_f) y - \frac{T^{t+1}}{P_1^{t+1}} - L_f d \right) \quad (8)$$

に等しい。これによって $P_1^{t+2} = P_1^{t+1}$ ならば

$$\frac{M^{t+2}}{P_1^{t+2}} = \frac{M^*}{P_1^*} \quad (9)$$

となる。つまり完全雇用を回復すれば実質の貯蓄は定常状態の値に戻る。

次に物価が下落し、 $P_1^{t+1} < P_1^t$, $\frac{T^t}{P_1^t} = \frac{T^*}{P_1^*} = \frac{G^*}{P_1^*}$ および $\frac{T^{t+1}}{P_1^{t+1}} = \frac{T^*}{P_1^*}$ であると仮定する。(6), (7) によつて

$$\frac{G^{t+1}}{P_1^{t+1}} + \frac{M^{t+1}}{P_1^{t+1}} = \frac{G^*}{P_1^*} + \frac{M^*}{P_1^*}$$

が成り立つ。 $\frac{T^t}{P_1^t} = \frac{T^*}{P_1^*}$ であるから

$$\frac{M^{t+1}}{P_1^{t+1}} = \frac{(1-\alpha)P_1^t \left(L^t l^t y - \frac{T^*}{P_1^*} - L_f d \right)}{P_1^{t+1}}$$

が得られる。一方,

$$\frac{M^*}{P_1^*} = \frac{(1-\alpha)P_1^* (L_f l(L_f) y - \frac{T^*}{P_1^*} - L_f d)}{P_1^*} = (1-\alpha) \left(L_f l(L_f) y - \frac{T^*}{P_1^*} - L_f d \right)$$

である。 $P_1^{t+1} < P_1^t$ であったとしても、 $P_1^{t+1} L_f l(L_f) y > P_1^t L^t l^t y$ であれば、すなわち、 $t+1$ 期における名目所得が t 期における名目所得より大きければ、

$$\frac{M^{t+1}}{P_1^{t+1}} < \frac{M^*}{P_1^*}$$

であるから、 $\frac{G^{t+1}}{P_1^{t+1}} > \frac{G^t}{P_1^t} = \frac{G^*}{P_1^*} = \frac{T^{t+1}}{P_1^{t+1}}$ となり、このケースでも財政赤字が必要であることがわかる。

第 $t+1$ 期に完全雇用を達成した後、 $P_1^{t+2} = P_1^{t+1}$ のもとで第 $t+2$ 期にもそれを維持して行くためには

$$L_f l(L_f) = \frac{(1-\alpha)L_f d - \alpha \frac{T^*}{P_1^*} + \frac{G^{t+2}}{P_1^{t+1}} + \frac{M^{t+2}}{P_1^{t+1}}}{(1-\alpha)y}$$

が成り立つことが要求される。そのとき(9)により $\frac{G^{t+2}}{P_1^{t+2}} = \frac{G^*}{P_1^*}$ である。これは、第 $t+1$ 期に、

完全雇用を達成した後、第 $t+2$ 期にそれを維持するためには均衡財政が必要であることを意味する。したがって、第 $t+1$ 期に完全雇用を実現するために必要となる追加的な財政支出は返済を前提としない政府債務、あるいはいわゆる通貨発行益(seigniorage)によって調達されることが求められる。以上の議論をまとめると、

命題 1

1. 非自発的失業が発生している状況において財政政策によって完全雇用を実現するためには財政赤字が必要である。
2. 実現された完全雇用はそれ以降均衡財政によって維持していくことができるので、完全雇用を実現するための追加的な財政支出は返済を前提としない政府債務または通貨発行益によって賄われるべきである。

貨幣供給量の変化

貨幣供給は各期の若年者による正味の貯蓄として次の期に持ち越されるので、ある期における貨幣供給量の変化はその期の若年世代による正味の貯蓄と老年世代が若年期から持ち越した正味の貯蓄の差に等しい。年金額が世代を通して一定なので(5)、(8)によって

$$M^{t+2} - M^{t+1} = G^{t+1} - T^{t+1}$$

となるから、貨幣供給量の増加は財政赤字に等しいことがわかる。しかし、貯蓄はいずれ消費に支出されるから貯蓄が増えると国民所得も増えるので貨幣が過剰になるわけではない。 $P_1^{t+1} = P_1^t$ ならば

$$L_f l(L_f)y - L^t l^t y = \frac{1}{(1-\alpha)P_1^t} (G^{t+1} - T^{t+1})$$

となり、財政赤字の乗数倍に相当する所得の増加が得られる。 $P_1^{t+1} < P_1^t$ のときは

$$P_1^{t+1} L_f l(L_f)y - P_1^t L^t l^t y = \frac{M^{t+2} - M^{t+1}}{1-\alpha} + P_1^{t+1} \frac{T^{t+1}}{P_1^{t+1}} - P_1^t \frac{T^t}{P_1^t} + (P_1^{t+1} - P_1^t) L_f d$$

となり、 $\frac{T^{t+1}}{P_1^{t+1}} = \frac{T^t}{P_1^t}$ ならば名目所得の増加額は貨幣供給増加額の乗数倍より小さい。実質所得の変化は

$$L_f l(L_f)y - L^t l^t y = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{M^{t+2}}{P_1^{t+1}} - \frac{M^{t+1}}{P_1^t} \right)$$

と表される。実質所得の変化が貨幣供給の実質値の変化の乗数倍であることがわかる。

4. 完全雇用のための財政政策：減税

前節の分析における追加的な財政支出は公共投資などではなく、老年世代の消費のために支出されてもかまわない。しかし、それが（減税の形で）若年世代の消費のために支出された場合には、その一部が若年世代の人々の退職後に備えた貯蓄に回される可能性があるので状況は少々複雑になる。そのときには、第 $t+1$ 期に完全雇用が達成された後、老年世代の貯蓄が増えるので第 $t+2$ 期に完全雇用を維持するためには増税が必要になり、それによって貯蓄が減るから第 $t+3$ 期に雇用を維持するのに減税が必要になり、第 $t+4$ 期に維持するのに再び増税が必要になり...、というような状況になる。詳しく分析してみよう。

まず、第 $t+1$ 期に $T^{t+1} < T^t$ の課税によって完全雇用が達成されたと想定する。最初に $P_1^{t+1} = P_1^t$ の場合を考える。財政支出の実質値が変化しないとして

$$\frac{G^{t+1}}{P_1^{t+1}} = \frac{G^t}{P_1^t} = \frac{G^*}{P_1^*}$$

が成り立つと仮定すると、

$$L_f l(L_f) = \frac{(1-\alpha)L_f d - \alpha \frac{T^{t+1}}{P_1^{t+1}} + \frac{G^t}{P_1^t} + \frac{M^{t+1}}{P_1^{t+1}}}{(1-\alpha)y} \quad (10)$$

を得る。 $P_1^{t+1} = P_1^t = P_1^*$ および $G^t = G^* = T^*$ であれば、(7)、(10) と $M^{t+1} < M^*$ より $T^{t+1} < T^*$ でなければならぬ。 $P_1^{t+1} = P_1^t \neq P_1^*$ かつ $\frac{G^{t+1}}{P_1^{t+1}} = \frac{G^t}{P_1^t} = \frac{G^*}{P_1^*} = \frac{T^*}{P_1^*}$ のときは、(7)、(10) および $\frac{M^{t+1}}{P_1^t} < \frac{M^*}{P_1^*}$ によつて

$\frac{T^{t+1}}{P_1^{t+1}} < \frac{T^*}{P_1^*} = \frac{G^{t+1}}{P_1^{t+1}}$ が得られる。したがって、第 $t+1$ 期に完全雇用を実現するためには財政赤字

が必要である。次に、 $P_1^{t+1} < P_1^t$, $\frac{G^t}{P_1^t} = \frac{G^*}{P_1^*} = \frac{T^*}{P_1^*}$ かつ $\frac{G^{t+1}}{P_1^{t+1}} = \frac{G^*}{P_1^*}$ であると仮定する。そのとき (7), (10)によって

$$-\alpha \frac{T^{t+1}}{P_1^{t+1}} + \frac{M^{t+1}}{P_1^{t+1}} = -\alpha \frac{T^*}{P_1^*} + \frac{M^*}{P_1^*}$$

を得る。 $\frac{T^t}{P_1^t} = \frac{T^*}{P_1^*}$ であれば

$$\frac{M^{t+1}}{P_1^{t+1}} = \frac{(1-\alpha)P_1^t \left(L^t l^t y - \frac{T^*}{P_1^*} - L_f d \right)}{P_1^{t+1}}$$

となる。一方、

$$\frac{M^*}{P_1^*} = \frac{(1-\alpha)P_1^* (L_f l(L_f) y - \frac{T^*}{P_1^*} - L_f d)}{P_1^*} = (1-\alpha) \left(L_f l(L_f) y - \frac{T^*}{P_1^*} - L_f d \right)$$

である。 $P_1^{t+1} < P_1^t$ であるとしても、 $P_1^{t+1} L_f l(L_f) y > P_1^t L^t l^t y$ ならば、すなわち第 $t+1$ 期の名目国民所得が第 t 期の名目国民所得より大きければ、

$$\frac{M^{t+1}}{P_1^{t+1}} < \frac{M^*}{P_1^*}$$

が成り立つ。したがって、 $\frac{T^{t+1}}{P_1^{t+1}} < \frac{T^*}{P_1^*} = \frac{G^{t+1}}{P_1^{t+1}}$ となり、財政赤字の必要性が示された。

第 $t+1$ 期に完全雇用を達成した後、 $P_1^{t+2} = P_1^{t+1}$ のもとで第 $t+2$ 期にそれを維持するためには

$$L_f l(L_f) = \frac{(1-\alpha)L_f d - \alpha \frac{T^{t+2}}{P_1^{t+1}} + \frac{G^*}{P_1^*} + \frac{M^{t+2}}{P_1^{t+1}}}{(1-\alpha)y} \quad (11)$$

が必要である。第 $t+1$ 期における若年世代の消費者の貯蓄は

$$M^{t+2} = (1-\alpha)P_1^{t+1} \left(L_f l(L_f) y - \frac{T^{t+1}}{P_1^{t+1}} - L_f d \right) \quad (12)$$

に等しい。 $\frac{T^{t+1}}{P_1^{t+1}} < \frac{T^*}{P_1^*}$ であるから

$$\frac{M^{t+2}}{P_1^{t+1}} > \frac{M^*}{P_1^*}$$

となり、(11)によって

$$\frac{T^{t+2}}{P_1^{t+2}} > \frac{T^*}{P_1^*} = \frac{G^*}{P_1^*} \quad (13)$$

が得られる。したがって、第 $t+2$ 期に完全雇用を維持するには財政黒字を必要とすることがわかる。第 $t+2$ 期における若年世代の消費者による貯蓄は

$$M^{t+3} = (1 - \alpha)P_1^{t+2} \left(L_f l(L_f) y - \frac{T^{t+2}}{P_1^{t+2}} - L_f d \right) \quad (14)$$

に等しい。(13)より

$$\frac{M^{t+3}}{P_1^{t+2}} < \frac{M^*}{P_1^*} \quad (15)$$

を得る。 $P_1^{t+3} = P_1^{t+2} = P_1^{t+1}$ のもとで第 $t+3$ 期に完全雇用を維持するためには

$$L_f l(L_f) = \frac{(1-\alpha)L_f d - \alpha \frac{T^{t+3}}{P_1^{t+3}} + \frac{G^*}{P_1^*} + \frac{M^{t+3}}{P_1^{t+2}}}{(1-\alpha)y} \quad (16)$$

を必要とする。(15)によって

$$\frac{T^{t+3}}{P_1^{t+3}} < \frac{T^*}{P_1^*} = \frac{G^*}{P_1^*}$$

となるから、第 $t+3$ 期に完全雇用を達成するためには財政赤字が必要である。以下、各期ごとに財政黒字、財政赤字が順に求められる。(11), (12), (14)および(16)により

$$\frac{T^{t+3} - T^{t+2}}{P_1^{t+1}} = -\frac{1-\alpha}{\alpha} \left(\frac{T^{t+2} - T^{t+1}}{P_1^{t+1}} \right) \quad (17)$$

となるが、一般的には $i \geq 1$ について

$$\frac{T^{t+i+2} - T^{t+i+1}}{P_1^{t+1}} = -\frac{1-\alpha}{\alpha} \left(\frac{T^{t+i+1} - T^{t+i}}{P_1^{t+1}} \right) \quad (18)$$

と表される。 $\alpha > \frac{1}{2}$ 、すなわち、消費者の限界消費性向が $\frac{1}{2}$ より大きければ、

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{T^{t+i+2} - T^{t+i+1}}{P_1^{t+1}} = 0$$

が成り立つ。1以上の奇数 i について

$$\frac{T^{t+i+1}}{P_1^{t+1}} > \frac{T^*}{P_1^*} > \frac{T^{t+i}}{P_1^{t+1}}$$

であるから、 $\alpha > \frac{1}{2}$ ならば

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{T^{t+i}}{P_1^{t+1}} = \frac{T^*}{P_1^*}$$

が導かれる。したがって、消費者の限界消費性向が $\frac{1}{2}$ より大きければ、税収の水準は定常状態における値に収束し、財政収支も均衡財政に収束する。(17)および(18)によって

$$\frac{T^{t+i+1} - T^{t+i}}{P_1^{t+1}} = \left(-\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{i-1} \left(\frac{T^{t+2} - T^{t+1}}{P_1^{t+1}} \right).$$

したがって、

$$\begin{aligned}\frac{T^{t+i+1}}{P_1^{t+i+1}} &= \frac{T^{t+1}}{P_1^{t+1}} + \sum_{j=1}^i \left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{j-1} \left(\frac{T^{t+2}-T^{t+1}}{P_1^{t+1}}\right) = \frac{T^{t+1}}{P_1^{t+1}} + \frac{1-\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^i}{1-\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)} \left(\frac{T^{t+2}-T^{t+1}}{P_1^{t+1}}\right) \\ &= \frac{T^{t+1}}{P_1^{t+1}} + \alpha \left(1 - \left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^i\right) \left(\frac{T^{t+2}-T^{t+1}}{P_1^{t+1}}\right)\end{aligned}\quad (19)$$

となる。

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{T^{t+i+1}}{P_1^{t+i+1}} = (1-\alpha) \frac{T^{t+1}}{P_1^{t+1}} + \alpha \frac{T^{t+2}}{P_1^{t+1}} = \frac{T^*}{P_1^*} \quad (20)$$

なので、(19)は

$$\frac{T^{t+i+1}}{P_1^{t+i+1}} = \frac{T^*}{P_1^*} - \alpha \left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^i \left(\frac{T^{t+2}-T^{t+1}}{P_1^{t+1}}\right)$$

を意味し、

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{T^{t+i+1}}{P_1^{t+i+1}} - \frac{T^*}{P_1^*}\right) = \alpha(1-\alpha) \left(1 - \left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^n\right) \left(\frac{T^{t+2}-T^{t+1}}{P_1^{t+1}}\right)$$

が得られる。(20)によって

$$\frac{T^{t+2}}{P_1^{t+1}} - \frac{T^{t+1}}{P_1^{t+1}} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{T^*}{P_1^*} - \frac{T^{t+1}}{P_1^{t+1}}\right)$$

である。 $\alpha > \frac{1}{2}$ とすると

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{T^{t+i+1}}{P_1^{t+i+1}} - \frac{T^*}{P_1^*}\right) = \alpha(1-\alpha) \left(\frac{T^{t+2}-T^{t+1}}{P_1^{t+1}}\right) = (1-\alpha) \left(\frac{T^*}{P_1^*} - \frac{T^{t+1}}{P_1^{t+1}}\right)$$

を得る。この式より

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n \left(\frac{T^{t+i+1}}{P_1^{t+i+1}} - \frac{T^*}{P_1^*}\right) = \frac{T^{t+1}}{P_1^{t+1}} - \frac{T^*}{P_1^*} + (1-\alpha) \left(\frac{T^*}{P_1^*} - \frac{T^{t+1}}{P_1^{t+1}}\right) = -\alpha \left(\frac{T^*}{P_1^*} - \frac{T^{t+1}}{P_1^{t+1}}\right) < 0$$

を得る。これは第 $t+1$ 期において減税額の内その期の消費に当てられる部分に等しい。したがって、減税の効果が完全に波及する長期における全体的な財政収支は赤字であり、第 $t+1$ 期の減税の内その期の消費に当てられる部分は返済を必要としない政府債務、あるいは通貨発行益で賄われるべきである。

議論をまとめると、

命題 2

1. 非自発的失業が発生している状況において減税によって完全雇用を実現するためには財政赤字が必要であり、完全雇用を維持するためにその次の期には財政黒字が必要、次の期には再び財政赤字が必要...、となる。

2. 消費者の限界消費性向が $\frac{1}{2}$ より大きければ、時間の経過とともに税収の水準は定常状態の値に収束し、財政収支は均衡財政に収束する。

3. 減税の効果が完全に行き渡る長期において全体的な財政収支は赤字であり、最初の減税の内その期の消費に当てられる部分は返済を必要としない政府債務、あるいは通貨発行益で賄われるべきである。

5. 結論

以上、本稿においては非自発的失業が発生している不況下において財政政策によって完全雇用を実現する道について検討し、そのための追加的な財政支出は政府債務の増加によって賄い、それは返済するべきではないことを論じた。したがって政府債務ではなく通貨発行益をもとに支出を増やすことも考えられる。減税についても同様の結論を得たが、財政支出の増加と異なって減税は貯蓄を増やすので、完全雇用を実現した次の期には増税が必要になり、さらに次の期にはまた減税が必要になる、ということが繰り返されることが示された。消費者の限界消費性向が $\frac{1}{2}$ より大きければ、時間の経過とともに変化が小さくなって定常状態に収束する。そのとき全体としては財政支出増加と減税はまったく同じ効果を持つ。これは、減税が貯蓄を増やすとしてもその貯蓄は消費者が老年世代になったときに消費に使われるからである。

付録：消費者の効用最大化のステップ2における計算

雇用された消費者および失業している消費者のステップ2における Lagrange 関数は、それぞれ

$$\mathcal{L}_1^e = \left(\int_0^1 c_1^e(z) \frac{\sigma-1}{\sigma} dz \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (\text{A.1})$$

$$-\lambda_1^e \left[\int_0^1 p_1(z) c_1^e(z) dz - \alpha(Wl + \Pi - D - \Theta + \hat{Q} - \Psi) \right],$$

$$\mathcal{L}_2^e = \left(\int_0^1 c_2^e(z) \frac{\sigma-1}{\sigma} dz \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

$$-\lambda_2^e \left[\int_0^1 p_2(z) c_2^e(z) dz - (1-\alpha)(Wl + \Pi - D - \Theta + \hat{Q} - \Psi) \right],$$

$$\mathcal{L}_1^u = \left(\int_0^1 c_1^u(z) \frac{\sigma-1}{\sigma} dz \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - \lambda_1^u \left[\int_0^1 p_1(z) c_1^u(z) dz - \alpha(\Pi + \hat{Q}) \right],$$

および

$$\mathcal{L}_2^u = \left(\int_0^1 c_2^u(z) \frac{\sigma-1}{\sigma} dz \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - \lambda_2^u \left[\int_0^1 p_2(z) c_2^u(z) dz - \alpha(\Pi + \hat{Q}) \right].$$

と表される。 $\lambda_1^e, \lambda_2^e, \lambda_1^u, \lambda_2^u$ は Lagrange 乗数である。

(A.1) に関する一階条件は

$$\left(\int_0^1 c_1^e(z) \frac{\sigma-1}{\sigma} dz \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} c_1^e(z)^{-\frac{1}{\sigma}} - \lambda_1^e p_1(z) = 0. \quad (\text{A.2})$$

この式から

$$\left(\int_0^1 c_1^e(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dz\right)^{-1} c_1^e(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} = (\lambda_1^e)^{1-\sigma} p_1(z)^{1-\sigma}$$

となるから,

$$\left(\int_0^1 c_1^e(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dz\right)^{-1} \int_0^1 c_1^e(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dz = (\lambda_1^e)^{1-\sigma} \int_0^1 p_1(z)^{1-\sigma} dz = 1$$

を得る。これは

$$\lambda_1^e \left(\int_0^1 p_1(z)^{1-\sigma} dz\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} = 1$$

を意味するので,

$$P_1 = \frac{1}{\lambda_1^e}$$

である。(A.2)より

$$\left(\int_0^1 c_1^e(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dz\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} c_1^e(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} = \lambda_1^e p_1(z) c_1^e(z).$$

したがって

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 c_1^e(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dz\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \int_0^1 c_1^e(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dz &= \left(\int_0^1 c_1^e(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dz\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\ &= C_1^e = \lambda_1^e \int_0^1 p_1(z) c_1^e(z) dz = \frac{1}{P_1} \int_0^1 p_1(z) c_1^e(z) dz \end{aligned}$$

であるから

$$\int_0^1 p_1(z) c_1^e(z) dz = P_1 C_1^e$$

となる。同様にして

$$\int_0^1 p_2(z) c_2^e(z) dz = P_2 C_2^e$$

が得られる。よって

$$\int_0^1 p_1(z) c_1^e(z) dz + \int_0^1 p_2(z) c_2^e(z) dz = P_1 C_1^e + P_2 C_2^e = Wl + \Pi - D - \Theta + \hat{Q} - \Psi$$

となり

$$P_1 C_1^e = \alpha(Wl + \Pi - D - \Theta + \hat{Q} - \Psi)$$

を得る。(A.2)によって

$$\left(\int_0^1 c_1^e(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dz\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} c_1^e(z)^{-1} = C_1^e c_1^e(z)^{-1} = (\lambda_1^e)^\sigma p_1(z)^\sigma = \left(\frac{p_1(z)}{P_1}\right)^\sigma.$$

この式から

$$c_1^e(z) = \left(\frac{p_1(z)}{P_1} \right)^{-\sigma} \frac{\alpha(WI+\Pi-D-\Theta+\hat{Q}-\Psi)}{P_1}$$

が得られる。 $c_2^e(z)$, $c_1^u(z)$ および $c_2^u(z)$ も同様にして求められる。

参考文献

A. P. Lerner. *The Economics of Control: Principles of Welfare Economics*. Macmillan, 1944.

W. Mitchell, L. R. Wray, and M. Watts. *Macroeconomics*. Red Globe Press, 2019.

M. Otaki. The dynamically extended Keynesian cross and the welfare-improving fiscal policy. *Economics Letters*, 96,23–29, 2007.

M. Otaki. A welfare economics foundation for the full-employment policy. *Economics Letters*, 102, 1–3, 2009.

M. Otaki. *Keynesian Economics and Price Theory: Re-orientation of a Theory of Monetary Economy*. Springer, 2015a.

M. Otaki. Public Debt as a Burden on the Future Generation: A Keynesian Approach. *Theoretical Economics Letters*, 5, 651-658, 2015b.

田村正興. The Economics of Control Principles of Welfare Economics Abba P. Lerner. *社会科学研究*, 66, 199-212, 2015.

田中靖人. 独占的競争における均衡財政乗数の分析と非自発的失業の存在証明. *MACRO REVIEW*, 32, 40–48, 2020a.

田中靖人. 収穫逓増と弾力的な労働供給の場合の独占的競争下の非自発的失業. *MACRO REVIEW*, 32, 61–73, 2020b.